集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念

第 1 课时 集合的概念

【学习目标】1. 通过实例了解集合与元素的含义,利用集合中元素的三个特征解决一些简单的问题,能判断元素与集合的关系. 2. 识记常见数集的表示符号.

一、元素与集合的概念

问题 1 看下面的几个例子,观察并讨论它们有什么共同特点.

(1)所在班级中的高个子同学;

(2)所在班级中身高最高的三位同学.

【知识梳理】

1. 元素:一般地,我们把研究对象统称为________.元素通常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$表示.

2. 集合:把一些元素组成的总体叫做________(简称为________).集合通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$表示.

二、集合中元素的特征

问题 2 问题 1 中的几个例子都能构成集合吗?

【知识梳理】

1. 集合中元素的特征:________,________,________;

2. 集合相等:只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是________的.

例 1 (1)(多选)以下元素的全体能构成集合的是 ( )

A. 中国古代四大发明

B. 周长为 10 cm 的三角形

C. 方程 $x^2+2x+1=0$ 的实数根

D. 地球上的小河流

(2)集合 P 中含有两个元素 1 和 4,集合 Q 中含有两个元素 1 和 a^2,若 $P=Q$,则 $a=$________.

反思感悟 (1)判断一组对象能构成集合的条件

①能找到一个明确的标准,使得对于任何一个对象,都能确定它是不是给定集合的元素;

②任何两个对象都是不同的;

③对元素出现的顺序没有要求.

(2)判断两个集合相等的注意点

若两个集合相等,则这两个集合的元素相同,但是要注意其中的元素不一定按顺序对应相等.

跟踪训练 1

(1)下列说法中正确的是 ( )

A. 与定点 A,B 等距离的点不能构成集合

B. 由"title"中的字母构成的集合中元素的个数为 5

C. 一个集合中有三个元素 a,b,c,其中 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,则 $\triangle ABC$ 不可能是等腰三角形

D. 高中学生中的游泳能手能构成集合

(2)设 a,b 是两个实数,集合 A 中含有 $0,b,\frac{b}{a}$ 三个元素,集合 B 中含有 $1,a,a+b$ 三个元素,且集合 A 与集合 B 相等,则 $a+2b=$________.

三、元素和集合之间的关系

问题 3 体育老师说:"男同学打篮球,女同学跳绳."你会去打篮球吗?

【知识梳理】

1. 元素和集合之间的关系

<table>
<tr><td>知识点</td><td>关系</td><td>概念</td><td>记法</td><td>读法</td></tr>
<tr><td rowspan="2">元素与集合的关系</td><td>属于</td><td>如果 a 是集合 A 的元素</td><td></td><td>a 属于集合 A</td></tr>
<tr><td>不属于</td><td>如果 a 不是集合 A 的元素</td><td></td><td>a 不属于集合 A</td></tr>
</table>

2. 常用数集及其记法

名称	非负整数集(或自然数集)	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法		____ 或____			

例 2 (1)下列结论中,不正确的是 ( )

A. 若 $a\in \mathbf{N}$,则 $-a\notin \mathbf{N}$

B. 若 $a\in \mathbf{Z}$,则 $a^2\in \mathbf{Z}$

C. 若 $a\in \mathbf{Q}$,则 $|a|\in \mathbf{Q}$

D. 若 $a\in \mathbf{R}$,则 $a^3\in \mathbf{R}$

(2)设集合 B 是小于 $\sqrt{11}$ 的所有实数的集合,则 $2\sqrt{3}$________B,$1+\sqrt{2}$________B.(用符号"$\in$"或"$\notin$"填空)

反思感悟 判断元素和集合关系的方法

直接法:首先明确集合是由哪些元素构成的,然后判断该元素在已知集合中是否出现即可.

推理法:首先明确已知集合的元素具有什么特征,然后判断该元素是否满足集合中元素所具有的特征即可.

跟踪训练 2

(1)用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

0________$\mathbf{N}$;-3________$\mathbf{N}$;0.5________$\mathbf{Z}$;

$\sqrt{2}$________$\mathbf{N}$;$\frac{1}{3}$________$\mathbf{Q}$.

(2)已知集合 A 中元素 x 满足 $2x+a>0$,$a\in \mathbf{R}$,若 $1\notin A$,$2\in A$,则实数 a 的取值范围为________.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)元素与集合的概念;

(2)集合中元素的特征;

(3)元素与集合的关系;

(4)常用数集的记法.

2. 方法归纳:直接法、推理法.

3. 常见误区:自然数集中容易遗忘 0 这个元素.

随堂演练

1. (多选)下列各组对象能构成集合的有 ( )

A. 接近 1 的所有正整数

B. 小于 0 的实数

C. (2 021,1)与(1,2 021)

D. 未来世界的高科技产品

2. 集合 M 是由大于 -2 且小于 1 的实数构成的,则下列关系正确的是 ( )

A. $\sqrt{5}\in M$　　B. $0\notin M$

C. $1\in M$　　D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

3. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空.

设 A 为所有亚洲国家组成的集合,则中国

________A,美国________A,印度________A,英国________A.

4. 设集合 A 含有两个元素 x,y,B 含有两个元素 $0,x^2$,若 $A=B$,则实数 $x=$________;$y=$________.

提醒:完成作业　第一章　1.1　第 1 课时

第 2 课时　集合的表示

【学习目标】1. 掌握集合的两种表示方法:列举法和描述法.　2. 会用集合的两种表示方法表示一些简单的集合.

一、用列举法表示集合

问题 1　用 A 表示"本班所有的男生"组成的集合,这是利用哪种方法表示的集合?你能把集合 A 中的所有元素逐一列举出来吗?

【知识梳理】

列举法——把集合的所有元素________出来,并用花括号"{ }"括起来表示集合的方法叫做________.

例 1　用列举法表示下列集合:

(1)小于 10 的所有正整数组成的集合;

(2)方程 $x^2+x=0$ 的所有实数根组成的集合;

(3)直线 $y=2x+1$ 与 y 轴的交点组成的集合.

反思感悟　用列举法表示集合的 3 个步骤

(1)求出集合的元素;

(2)把元素一一列举出来,且相同元素只能列举一次;

(3)用花括号括起来.

提醒:二元方程组的解集、函数图象上的点构成的集合都是点的集合,一定要写成实数对的形式,元素与元素之间用","隔开. 如 $\{(2,3),(5,-1)\}$.

跟踪训练 1

用列举法表示下列给定的集合:

(1)不大于 10 的非负偶数组成的集合 A;

(2)小于 8 的质数组成的集合 B;

(3)方程 $2x^2-x-3=0$ 的实数根组成的集合 C;

(4)一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 的图象的交点组成的集合 D.

二、用描述法表示集合

问题 2　你能用列举法表示不等式 $x-7<3$ 的解集吗?

问题 3　仿照上面的例子以及阅读课本,你能表示偶数集吗?

【知识梳理】

一般地,设 A 是一个集合,我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为________,这种表示集合的方法称为描述法.

例 2　用描述法表示下列集合：

(1)不等式 $2x-3<1$ 的解组成的集合 A；

(2)被 3 除余 2 的正整数的集合 B；

(3)$C=\{2,4,6,8,10\}$；

(4)平面直角坐标系中第二象限内的点组成的集合 D.

反思感悟　(1)用描述法表示集合时应弄清楚集合的属性，即它是数集、点集还是其他的类型.一般地，数集用一个字母代表其元素，点集用一个有序实数对代表其元素.

(2)若描述部分出现代表元素以外的字母，则要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

跟踪训练 2

试分别用描述法和列举法表示下列集合：

(1)方程 $x^2-5=0$ 的所有实数根组成的集合 A；

(2)由小于 8 的所有自然数组成的集合 B.

三、方程与集合

例 3　已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中只有一个元素，求 a 的值.

反思感悟　根据已知的集合求参数的关注点

(1)若已知集合是用描述法给出的，读懂集合的代表元素及其属性是解题的关键，如例 3 集合 A 中的元素就是所给方程的根，由此便把集合的元素个数问题转化为方程的根的个数问题.

(2)$a=0$ 这种情况极易被忽视，对于方程“$ax^2+2x+1=0$”有两种情况：一是 $a=0$，即它是一元一次方程；二是 $a\neq0$，即它是一元二次方程，也只有在这种情况下，才能用判别式 Δ 来解决问题.

跟踪训练 3

已知集合 $A=\{a+3,(a+1)^2,a^2+2a+2\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)列举法；

(2)描述法；

(3)集合与方程、不等式的关系.

2. 方法归纳：分类讨论.

3. 常见误区：列举法与描述法的乱用，涉及 x^2 的系数不确定时，忽略讨论方程是一次方程还是二次方程.

随堂演练

1. 集合 $\{x\in\mathbf{N}^*|x-2\leqslant1\}$ 的另一种表示法是　　(　　)

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{0,1,2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 对集合 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$ 用描述法来表示，其中正确的是　　(　　)

A. $\left\{x\middle|x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{Z}\text{ 且 }n<5\right\}$

B. $\left\{x\middle|x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{Z}\text{ 且 }n\leqslant5\right\}$

C. $\left\{x\middle|x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }n<5\right\}$

D. $\left\{x\middle|x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }n\leqslant5\right\}$

3. 下列说法中正确的是 (　　)

①0 与$\{0\}$表示同一个集合;

②由 1,2,3 组成的集合可表示为$\{1,2,3\}$或$\{3,2,1\}$;

③方程$(x-1)^2(x-2)=0$的所有解组成的集合可表示为$\{1,1,2\}$;

④集合$\{x|4<x<5\}$可以用列举法表示.

A. ①和④　　B. ②和③

C. ②　　D. ②和④

4. 用列举法表示集合$D=\{(x,y)|x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N},y=-x^2+8\}$为________.

提醒:完成作业　第一章　1.1　第 2 课时

1.2　集合间的基本关系

【学习目标】1. 理解两个集合间的包含关系. 2. 能用符号和 Venn 图表示两个集合间的关系. 3. 理解空集与子集、真子集之间的关系.

一、子集

问题 1　观察下面的几个例子,请同学们说出它们之间的“包含”关系吧.

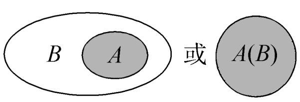
(1)$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$;

(2)C为立德中学高一(2)班全体女生组成的集合,D为这个班全体学生组成的集合;

(3)$A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{$偶数$\}$.

【知识梳理】

1.

定义	一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素,就称集合A为集合B的__________
记法与读法	记作__________(或$B\supseteq A$),读作“__________”(或“B包含A”)
图示	
结论	(1)任何一个集合是它本身的子集,即__________; (2)对于集合A,B,C,若$A\subseteq B$,且$B\subseteq C$,则__________

2. 一般地,如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素,同时集合B的任何一个元素都是集合A的元素,那么集合A与集合B相等,记作________.

也就是说,若$A\subseteq B$,且$B\subseteq A$,则________.

例 1　指出下列各对集合之间的关系:

(1)$A=\{x|-1<x<4\}$,$B=\{x|x-5<0\}$;

(2)$A=\{x|x$是正方形$\}$,$B=\{x|x$是矩形$\}$;

(3)$M=\{x|x=2n-1,n\in \mathbf{N}^*\}$,$N=\{x|x=2n+1,n\in \mathbf{N}^*\}$.

跟踪训练 1

(1)已知$A=\{x|x$是正数$\}$,$B=\{x|x$是正整数$\}$,$C=\{x|x$是实数$\}$,那么A,B,C之间的关系是 (　　)

A. $A\subseteq B\subseteq C$　　B. $B\subseteq A\subseteq C$

C. $C\subseteq A\subseteq B$　　D. $A=B\subseteq C$

(2)现有以下三组集合:

①$\{a,b\}$和$\{b,a\}$;

②$\{1,0\}$和$\{(1,0)\}$;

③$\{y|y=x^2,x\in \mathbf{R}\}$和$\{x|y=x^2,x\in \mathbf{R}\}$.

其中,满足集合相等的有 (　　)

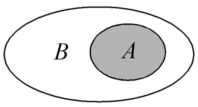
A. 3 组　　B. 2 组　　C. 1 组　　D. 0 组

二、真子集

问题 2 通过学习子集的概念我们发现,一个非空集合的子集有好多个,你能对它们分类吗?

【知识梳理】

1.

定义	如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,我们称集合 A 是集合 B 的真子集
记法	记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)
图示	
结论	(1)$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$; (2)$A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则 $A\subsetneqq B$

2.

定义	一般地,我们把不含任何元素的集合叫做________
记法	
规定	空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$
特性	(1)空集只有一个子集,即它的本身,$\varnothing\subseteq\varnothing$; (2)$A\neq\varnothing$,则 $\varnothing\subsetneqq A$

3. 性质:(1)反身性:任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;(2)传递性:对于集合 A,B,C,如果 $A\subsetneqq B$,且 $B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$.

例 2 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集,并指出哪些是它的真子集.

反思感悟 求元素个数有限的集合的子集的两个关注点

(1)要注意两个特殊的子集:$\varnothing$和自身.

(2)按集合中含有元素的个数由少到多,分类一一写出,保证不重不漏.

跟踪训练 2

满足 $\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 有________个.

三、由集合间的关系求参数

例 3 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x|2m-1<x<m+1\}$,且$B\subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

反思感悟 利用集合间的关系求参数的关注点

(1)分析集合间的关系时,首先要分析、简化每个集合.

(2)此类问题通常借助数轴,利用数轴分析法,将各个集合在数轴上表示出来,以形定数,还要注意验证端点值,做到准确无误.一般含"="用实心点表示,不含"="用空心圈表示.

(3)此类问题还要注意"空集"的情况,因为空集是任何集合的子集.

跟踪训练 3

已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$,$B=\{x|2a\leqslant x\leqslant a+3\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)子集、真子集的概念与性质；

(2)子集的个数；

(3)由集合间的关系求参数.

2. 方法归纳：分析法，观察法，元素特征法，数形结合，分类讨论.

3. 常见误区：在解决问题时，容易遗忘空集$\varnothing$，它在集合中有至高的地位；求含参数的问题时，容易遗漏端点的取值，应注意讨论.

随堂演练

1. 以下五个式子中，错误的个数为 ( )

①$\{1\}\in\{0,1,2\}$；

②$\{1,-3\}=\{-3,1\}$；

③$\{0,1,2\}\subseteq\{1,0,2\}$；

④$\varnothing\in\{0,1,2\}$；

⑤$\varnothing\in\{0\}$.

A. 5　B. 2　C. 3　D. 4

2. 已知集合$A=\{x|x<-2$或$x>0\}$，$B=\{x|0<x<1\}$，则 ( )

A. $A>B$　B. $A\subsetneqq B$　C. $B\subsetneqq A$　D. $A<B$

3. 集合$A=\{0,2,4,6\}$的子集个数是 ( )

A. 8　B. 12　C. 15　D. 16

4. 集合$A=\{x|1<x<6\}$，$B=\{x|x<a\}$，若$A\subseteq B$，则a的取值范围为________.

提醒：完成作业　第一章　1.2

1.3　集合的基本运算

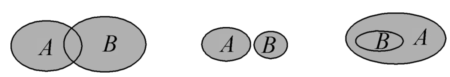
第1课时　集合的并集与交集运算

【学习目标】1. 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集. 2. 能使用Venn图或数轴表达集合的关系及运算.

一、并集的运算

问题1　某超市进了两次货，第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共6种，第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共4种，我们用集合A表示第一次进货的品种，用集合B表示第二次进货的品种，观察，你能用集合C表示两次一共进货的品种吗？并讨论集合A,B与集合C的关系.

【知识梳理】

文字语言	一般地，由________属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的________，记作________（读作“________”）
符号语言	$A\cup B=$__________
图形语言	
性质	$A\cup B=B\cup A$，$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\subseteq(A\cup B)$.

例1　(1)设$A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,4,9\}$，求$A\cup B$.

(2)设集合$A=\{x|0\leqslant x<4\}$，集合$B=\{x|1\leqslant x<5\}$，求$A\cup B$.

跟踪训练 1

设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B$ 等于 ( )

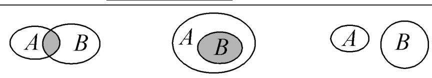
A. $\{x|2<x\leqslant 3\}$ B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<4\}$ D. $\{x|1<x<4\}$

二、交集的运算

问题 2 对于问题 1 中的集合 A 与集合 B，你能用集合 D 表示两次进货一样的品种吗？并讨论集合 A，B 与集合 D 的关系.

【知识梳理】

文字语言	一般地，由________属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的________，记作 $A\cap B$（读作"A 交 B"）
符号语言	$A\cap B=$________
图形语言	
性质	$A\cap B=B\cap A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cap B\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

例 2 (1)若集合 $A=\{x|-5<x<2\}$，$B=\{x|-3<x<3\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|-3<x<2\}$

B. $\{x|-5<x<2\}$

C. $\{x|-3<x<3\}$

D. $\{x|-5<x<3\}$

(2)若集合 $M=\{x|-2\leqslant x<2\}$，$N=\{0,1,2\}$，则 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{0\}$ B. $\{1\}$

C. $\{0,1,2\}$ D. $\{0,1\}$

反思感悟 交集运算的注意点

(1)求集合交集的运算类似于并集的运算，其方法为①定义法，②数形结合法.

(2)若 A，B 是无限连续的数集，多利用数轴来求解. 但要注意，利用数轴表示不等式时，含有端点的值用实点表示，不含有端点的值用空心圈表示.

(3)注意点：若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$；若 $A=B$，则 $A\cap B=B=A=A\cup B$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

跟踪训练 2

(1)已知 $A=\{x|1<x<6\}$，$B=\{x|4<x<8\}$，则 $A\cap B=$________.

(2)已知 $A=\{(x,y)|x+y=3\}$，$B=\{(x,y)|x-y=1\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{2,1\}$ B. $\{x=2,y=1\}$

C. $\{(2,1)\}$ D. $(2,1)$

三、根据并集与交集运算求参数

例 3 已知集合 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，$B=\{x|a<x<4\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $3\leqslant a<4$ B. $-1<a<4$

C. $a\leqslant -1$ D. $a<-1$

反思感悟 利用集合间的关系求参数的一般步骤

(1)若集合能一一列举，则用观察法得到不同集合中元素之间的关系；与不等式有关的集合，利用数轴得到不同集合间的关系.

(2)将集合之间的关系转化为方程或不等式是否有解或解集的取值范围.

(3)解方程(组)或不等式(组)，从而确定参数的值或取值范围.

跟踪训练 3

设集合 $M=\{x|-2<x<5\}$，$N=\{x|2-t<x<2t+1,t\in\mathbf{R}\}$. 若 $M\cap N=N$，则实数 t 的取值范围为________.

【课堂小结】

1. 知识清单

(1)并集的概念及运算；

(2)交集的概念及运算；

(3)根据集合间的运算求参数.

2. 方法归纳:观察法,图示法,数形结合,分类讨论.

3. 常见误区:在根据运算求参数时,容易遗忘空集这一重要的情况.

随堂演练

1. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $N=\{1,3,5\}$,则 ( )

A. $N\in M$　　B. $M\cup N=M$

C. $M\cap N=M$　　D. $M>N$

2. 若集合 $A=\{x|0<x<4\}$,$B=\{x|-4<x\leq 2\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|0<x<4\}$　　B. $\{x|-4<x\leq 2\}$

C. $\{x|0<x\leq 2\}$　　D. $\{x|-4<x<4\}$

3. 满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的所有集合 A 的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 若集合 A,B,C 满足 $A\cap B=A,B\cup C=C$,则 A 与 C 一定满足 ( )

A. $A\subsetneqq C$　　B. $C\subsetneqq A$

C. $A\subseteq C$　　D. $C\subseteq A$

提醒:完成作业　第一章　1.3　第 1 课时

第 2 课时　全集、补集及综合运用

【学习目标】1. 了解全集的含义及其符号表示.　2. 理解给定集合中一个子集的补集的含义,并会求给定子集的补集.　3. 会用 Venn 图、数轴进行集合的运算.

一、全集与补集

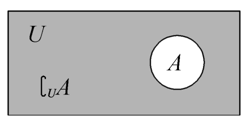
问题　如果我们把某次活动中的客人看成集合的元素,所有的客人组成集合 U,先到的客人组成集合 A,未到的客人组成集合 B,这三个集合间有什么样的关系?

【知识梳理】

1. 全集

定义	一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的______元素,那么就称这个集合为______
记法	全集通常记作______

2. 补集

<table>
<tr><td rowspan="3">定义</td><td>文字语言</td><td>对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作______</td></tr>
<tr><td>符号语言</td><td>$\complement_U A=$______</td></tr>
<tr><td>图形语言</td><td>
</td></tr>
<tr><td>性质</td><td colspan="2">(1)$\complement_U A\subseteq U$;
(2)$\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U\varnothing=U$;
(3)$\complement_U(\complement_U A)=A$;
(4)$A\cup(\complement_U A)=U$;$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$</td></tr>
</table>

例 1　(1)设 $U=\{x|x$ 是小于 7 的自然数$\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{1,5,6\}$,求 $\complement_U A$,$\complement_U B$.

(2)已知 $A=\{x|0\leq x<9\}$,$B=\{x|0<x\leq 5\}$,求 $\complement_A B$.

跟踪训练 1

若集合 $A=\{x|-1\leq x<1\}$，当 U 分别取下列集合时，求 $\complement_U A$.

(1) $U=\mathbf{R}$；

(2) $U=\{x|x\leq 2\}$；

(3) $U=\{x|-4\leq x\leq 1\}$.

二、交、并、补集的综合运算

例 2 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\leq 0\}$，$B=\{x|x\geq 1\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)$ 等于 ( )

A. $\{x|x\geq 0\}$ B. $\{x|x\leq 1\}$

C. $\{x|0\leq x\leq 1\}$ D. $\{x|0<x<1\}$

反思感悟 解决集合交、并、补集运算的技巧

(1)如果所给集合是有限集，则先把集合中的元素一一列举出来，然后结合交集、并集、补集的定义来求解. 在解答过程中常常借助 Venn 图来求解.

(2)如果所给集合是无限实数集，则常借助数轴，把已知集合及全集分别表示在数轴上，然后进行交、并、补集的运算，解答过程中要注意边界问题.

跟踪训练 2

已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-4\leq x<2\}$，$B=\{x|-1<x\leq 3\}$，$P=\left\{x\,\middle|\,x\leq 0 \text{ 或 } x\geq \frac{5}{2}\right\}$，求 $A\cap B$，$(\complement_U B)\cup P$，$(A\cap B)\cap(\complement_U P)$.

三、利用集合间的关系求参数

例 3 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x\leq -2 \text{ 或 } x\geq 3\}$，$B=\{x|2m+1<x<m+7\}$，若 $(\complement_U A)\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

跟踪训练 3

已知集合 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>2 \text{ 或 } x<-2\}$，$B=\{x|x\leq a\}$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2)若 $\complement_U A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：

 (1)全集与补集及性质；

 (2)混合运算；

 (3)利用集合间的关系求参数.

2. 方法归纳：观察法，分析法，数形结合，分类讨论.

3. 常见误区：自然数集容易遗漏 0 这一重要元素，解决含参数的集合运算时要注意空集这一重要情况.

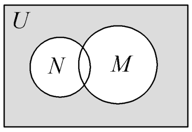
随堂演练

1. 设全集 $U=\{x|x$ 是小于 5 的非负整数$\}$，$A=\{2,4\}$，则 $\complement_U A$ 等于 ( )

 A. $\{1,3\}$ B. $\{1,3,5\}$

 C. $\{0,1,3\}$ D. $\{0,1,3,5\}$

2. 设全集 U 是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x<-2 \text{ 或 } x>2\}$，$N=\{x|1\leq x\leq 3\}$，如图，则阴影部分所表示的集合为 ( )



A. $\{x|-2\leqslant x<1\}$

B. $\{x|-2\leqslant x<3\}$

C. $\{x|x\leqslant 2$ 或 $x>3\}$

D. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

3. 已知全集 $U=\{-1,1,3\}$，集合 $A=\{a+2,a^2+2\}$，且 $\complement_U A=\{-1\}$，则 a 的值是 (　　)

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. ± 1

4. 已知 $U=\{x|x>0\}$，$A=\{x|2\leqslant x<6\}$，则 $\complement_U A=$ ________.

提醒：完成作业　第一章　1.3　第 2 课时

1.4　充分条件与必要条件

1.4.1　充分条件与必要条件

【学习目标】1. 理解充分条件、必要条件的概念.　2. 了解充分条件与判定定理、必要条件与性质定理的关系.　3. 能通过充分性、必要性解决简单的问题.

一、充分条件与必要条件

问题 1　如何理解“绳锯木断”“水滴石穿”？“木断”是否一定是因为“绳锯”？“石穿”是否一定是因为“水滴”？

问题 2　观察下面几个命题，你能把它们变成“若 p，则 q”的形式吗？你能得到什么？

(1)两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

(2)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

(3)两条对角线互相平分的四边形是平行四边形；

(4)平行四边形的两组对边分别相等；

(5)平行四边形的一组对边平行且相等；

(6)平行四边形的两条对角线互相平分.

【知识梳理】

充分条件与必要条件

	“若 p，则 q”为真命题	“若 p，则 q”为假命题
推出关系	p ________ q	$p\nRightarrow q$
条件关系	p 是 q 的 ________ 条件 q 是 p 的 ________ 条件	p 不是 q 的 ________ 条件 q 不是 p 的 ________ 条件
定理关系	判定定理给出了相应数学结论成立的充分条件 性质定理给出了相应数学结论成立的必要条件	

例 1　(1)指出下列哪些命题中 p 是 q 的充分条件.

①在 $\triangle ABC$ 中，p：$\angle B>\angle C$，q：$AC>AB$；

②已知 $x,y\in\mathbf{R}$，p：$x=1$，q：$(x-1)(x-2)=0$；

③已知 $x\in\mathbf{R}$，p：$x>1$，q：$x>2$.

(2)指出下列哪些命题中 q 是 p 的必要条件.

①p：一个四边形是矩形，q：四边形的对角线相等；

②p：$A\subseteq B$，q：$A\cap B=A$；

③p：$a>b$，q：$ac>bc$.

反思感悟 充分、必要条件的判断方法

(1)判断 p 是 q 的什么条件，主要判断若 p 成立时，能否推出 q 成立.反过来，若 q 成立时，能否推出 p 成立.若 $p\Rightarrow q$ 为真，则 p 是 q 的充分条件，若 $q\Rightarrow p$ 为真，则 p 是 q 的必要条件.

(2)也可利用集合的关系判断，设条件甲："$x\in A$"，条件乙："$x\in B$"，若 $A\supseteq B$，则甲是乙的必要条件.

跟踪训练 1

分析下列各题中 p 与 q 的关系.

(1)p：α 为锐角，q：$\alpha=45°$.

(2)p：$(x+1)(x-2)=0$，q：$x+1=0$.

二、充分条件与必要条件的应用

例 2 已知 p：实数 x 满足 $3a<x<a$，其中 $a<0$；q：实数 x 满足 $-2\leqslant x\leqslant 3$. 若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

反思感悟 充分条件与必要条件的应用技巧

(1)应用：可利用充分性与必要性进行相关问题的求解，特别是求参数的值或取值范围问题.

(2)求解步骤：先把 p，q 等价转化，利用充分条件、必要条件与集合间的包含关系，建立关于参数的不等式(组)进行求解.

跟踪训练 2

已知 $P=\{x\mid a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x\mid 1<x<3\}$，"$x\in P$"是"$x\in Q$"的必要条件，则实数 a 的取值范围是________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

 (1)充分条件、必要条件的概念；

 (2)充分条件与判定定理，必要条件与性质定理的关系；

 (3)充分条件、必要条件的判断；

 (4)充分条件与必要条件的应用.

2. 方法归纳：等价转化.

3. 常见误区：充分条件、必要条件不唯一；求参数范围能否取到端点值.

随堂演练

1. 若 p 是 q 的充分条件，则 q 是 p 的 ( )

 A. 充分条件

 B. 必要条件

 C. 既不是充分条件也不是必要条件

 D. 既是充分条件又是必要条件

2. "四边形的四条边相等"是"四边形是正方形"的 ( )

 A. 充分条件

 B. 必要条件

 C. 既是充分条件又是必要条件

 D. 既不是充分条件也不是必要条件

3. 使 $x>3$ 成立的充分条件是 ( )

 A. $x>4$ B. $x>0$ C. $x>2$ D. $x<2$

4. 若"$x>1$"是"$x>a$"的充分条件，则 a 的取值范围是________.

提醒：完成作业 第一章 1.4 1.4.1

1.4.2　充要条件

【学习目标】 1. 理解充要条件的意义.　2. 会判断一些简单的充要条件问题.　3. 能对充要条件进行证明.

一、充要条件

问题 1　下列“若 p,则 q”形式的命题中,哪些命题与它们的逆命题都是真命题?

(1)若两个三角形的两角和其中一角所对的边分别相等,则这两个三角形全等;

(2)若两个三角形全等,则这两个三角形的周长相等;

(3)若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根,则 $ac<0$;

(4)若 $A\cup B$ 是空集,则 A 与 B 均是空集.

问题 2　你能通过判断原命题和逆命题的真假来判断 p,q 的关系吗?

【知识梳理】

如果“若 p,则 q”和它的逆命题“若 q,则 p”均是真命题,即既有________,又有________,就记作________,此时,p 既是 q 的充分条件,也是 q 的必要条件,我们说 p 是 q 的充分必要条件,简称为________条件.

例 1　指出下列各组命题中,p 是 q 的什么条件(“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”或“既不充分也不必要条件”).

(1)$p:x=1,q:x-1=\sqrt{x-1}$;

(2)$p:-1\leqslant x\leqslant 5,q:x\geqslant -1$ 且 $x\leqslant 5$;

(3)$p:x+2\neq y,q:(x+2)^2\neq y^2$;

(4)$p:a$ 是自然数; $q:a$ 是正数.

跟踪训练 1

指出下列各组命题中,p 是 q 的什么条件(“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”或“既不充分也不必要条件”).

(1)p: 三角形为等腰三角形,q: 三角形存在两角相等;

(2)p:⊙O 内两条弦相等,q:⊙O 内两条弦所对的圆周角相等;

(3)$p:A\cap B=\varnothing,q:A$ 与 B 之一为空集;

(4)$p:a$ 能被 6 整除,$q:a$ 能被 3 整除.

二、充要条件的证明

例 2　求证:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 是常数且 $a\neq 0$)有一正实根和一负实根的充要条件是 $ac<0$.

反思感悟 充要条件证明的两个思路

(1)直接法:证明 p 是 q 的充要条件,首先要明确 p 是条件,q 是结论;其次推证 $p \Rightarrow q$ 是证明充分性,推证 $q \Rightarrow p$ 是证明必要性.

(2)集合思想:记 $p: A=\{x \mid p(x)\}$,$q: B=\{x \mid q(x)\}$,若 $A=B$,则 p 与 q 互为充要条件.

跟踪训练 2

求证:一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象过原点的充要条件是 $b=0$.

三、充分条件、必要条件、充要条件的应用

例 3 已知 $p: -2\leqslant x\leqslant 10$,$q: 1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$,若 p 是 q 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

反思感悟 应用充分不必要条件、必要不充分条件及充要条件求参数值(范围)的一般步骤

(1)根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系.

(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

跟踪训练 3

在"①充分不必要条件,②必要不充分条件,③充要条件"中任选一个补充在下面问题中,若问题中的 a 存在,求 a 的取值集合 M;若问题中的 a 不存在,说明理由.

问题:已知集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$,集合 $B=\{x \mid 1-a\leqslant x\leqslant 1+a\}(a>0)$,是否存在实数 a,使得 $x\in A$ 是 $x\in B$ 成立的________?

【课堂小结】

1. 知识清单:
   (1)充要条件概念的理解;
   (2)充要条件的证明;
   (3)充要条件的应用.
2. 方法归纳:等价转化.
3. 常见误区:条件和结论辨别不清.

随堂演练

1. "$x>0$"是"$x\neq 0$"的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. "$x^2-4x-5=0$"是"$x=5$"的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
3. "$a<b$"是"$\frac{a}{b}<1$"的 ( )
   A. 必要不充分条件
   B. 充分不必要条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
4. 函数 $y=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是________.

提醒:完成作业 第一章 1.4 1.4.2

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词

【学习目标】1. 理解全称量词、全称量词命题的定义. 2. 理解存在量词、存在量词命题的定义. 3. 会判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题,并会判断它们的真假.

一、全称量词与全称量词命题

问题 1 下列语句是命题吗?比较(1)和(3),(2)和(4),它们之间有什么关系?

(1) $x>3$;

(2) $2x+1$ 是整数;

(3)对所有的 $x\in\mathbf{R}$,$x>3$;

(4)对任意一个 $x\in\mathbf{Z}$,$2x+1$ 是整数.

【知识梳理】

全称量词与全称量词命题

全称量词	所有的、任意一个、一切、每一个、任给……
符号表示	
全称量词命题	含有________的命题
形式	“对 M 中________一个 x,$p(x)$成立”可用符号简记为“$\forall x\in M$,$p(x)$”

例 1 判断下列命题是否为全称量词命题,并判断真假.

(1)对任意直角三角形的两锐角 A,B,都有 $\sin A=\cos B$;

(2)自然数的平方大于或等于零;

(3)所有的二次函数的图象的开口都向上.

反思感悟 (1)判断一个命题是否为全称量词命题,主要看命题中是否有“所有的、任意一个、一切、每一个、任给”等表示全体的量词,有些命题的全称量词是隐藏的,要仔细辨别.

(2)判断真假时用直接法或间接法,直接法就是对陈述的集合中每一个元素都要使结论成立,间接法就是找到一个元素使结论不成立即可.

跟踪训练 1

判断下列全称量词命题的真假.

(1)在平面内,每个四边形的内角和都是 360°;

(2)任何实数都有算术平方根.

二、存在量词与存在量词命题

问题 2 下列语句是命题吗?比较(1)和(3),(2)和(4),它们之间有什么关系?

(1) $2x+1=3$;

(2) x 能被 2 和 3 整除;

(3)存在一个 $x\in\mathbf{R}$,使 $2x+1=3$;

(4)至少有一个 $x\in\mathbf{Z}$,x 能被 2 和 3 整除.

【知识梳理】

存在量词与存在量词命题

存在量词	存在一个、至少有一个、有一个，有些、有的……
符号表示	
存在量词命题	含有________的命题
形式	“存在 M 中的元素 x，$p(x)$ 成立”可用符号简记为“________”

例 2 判断下列命题是否为存在量词命题，并判断真假.

(1)有些整数既能被 2 整除，又能被 3 整除；

(2)某个四边形不是平行四边形；

(3)方程 $3x-2y=10$ 有整数解；

(4)有一个实数 x，使 $x^2+2x+4=0$.

跟踪训练 2

判断下列存在量词命题的真假.

(1)存在一个四边形，它的两条对角线互相垂直；

(2)至少有一个整数 n，使得 n^2+n 为奇数；

(3) $\exists x\in\{y|y$ 是无理数$\}$，x^2是无理数.

三、依据含量词命题的真假求参数的取值范围

例 3 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $B\neq\varnothing$，若命题 p：“$\forall x\in B$，$x\in A$”是真命题，求 m 的取值范围.

反思感悟 依据含量词命题的真假求参数取值范围问题的求解方法

(1)首先根据全称量词和存在量词的含义透彻地理解题意.

(2)其次根据含量词命题的真假把命题的真假问题转化为集合间的关系或函数的最值问题，再转化为关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.

跟踪训练 3

若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+4x+a=0$”为真命题，求实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：
 (1)全称量词命题、存在量词命题的概念；
 (2)含量词的命题的真假判断；
 (3)依据含量词的命题的真假求参数的取值范围.
2. 方法归纳：定义法、转化法.
3. 常见误区：有些命题省略了量词，全称量词命题强调“整体、全部”，存在量词命题强调“个别、部分”.

随堂演练

1. (多选)下列命题是全称量词命题的是 (　　)

A. 任意一个自然数都是正整数

B. 有的菱形是正方形

C. 梯形有两边平行

D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2+1=0$

2. 下列命题中是存在量词命题的是 (　　)

A. 任何一个实数乘 0 都等于 0

B. 任意一个负数都比零小

C. 每一个正方形都是矩形

D. 存在没有最大值的二次函数

3. 下列命题中是全称量词命题并且是真命题的是 (　　)

A. 每个二次函数的图象都开口向上

B. 存在一条直线与已知直线不平行

C. 对任意实数 a,b,若 $a-b\leqslant 0$,则 $a\leqslant b$

D. 存在一个实数 x,使等式 $x^2-2x+1=0$ 成立

4. 命题 p: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2+2x+5=0$ 是________(填"全称量词命题"或"存在量词命题"),它是________命题(填"真"或"假").

提醒:完成作业　第一章　1.5　1.5.1

1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

【学习目标】1. 通过实例总结含有一个量词的命题与其否定在形式上的变化规律.　2. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

一、全称量词命题的否定

问题 1　写出下列命题的否定:

(1)所有的矩形都是平行四边形;

(2)每一个素数都是奇数;

(3) $\forall x \in \mathbf{R}, x+|x|\geqslant 0$.

它们与原命题在形式上有什么变化?

【知识梳理】

1. 对于含有一个量词的全称量词命题的否定,有下面的结论:全称量词命题: $\forall x \in M, p(x)$,它的否定是:________. 也就是说,________命题的否定是存在量词命题.

2. 常见词语的否定形式

原词语	否定词语	原词语	否定词语
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
任意的	某个	能	不能
所有的	某些	等于	不等于

例 1　写出下列全称量词命题的否定:

(1)所有能被 2 整除的整数都是偶数;

(2)每一个三角形的三个顶点在同一个圆上;

(3)任何实数 x 都是方程 $5x-12=0$ 的根.

跟踪训练 1

写出下列命题的否定:

(1) $\forall n\in \mathbf{Z}, n\in \mathbf{Q}$;

(2)任意奇数的平方还是奇数;

(3)每个平行四边形都是中心对称图形.

二、存在量词命题的否定

问题 2 写出下列命题的否定:

(1)存在一个实数的绝对值是正数;

(2)有些平行四边形是菱形;

(3) $\exists x\in \mathbf{R}, x^2-2x+3=0$.

它们与原命题在形式上有什么变化?

【知识梳理】

对含有一个量词的存在量词命题的否定,有下面的结论:存在量词命题:$\exists x\in M, p(x)$,它的否定是:________. 也就是说,存在量词命题的否定是________命题.

例 2 写出下列存在量词命题的否定,并判断其否定的真假.

(1)某些梯形的对角线互相平分;

(2)存在 $k\in \mathbf{R}$,函数 $y=kx+b$ 随 x 值的增大而减小;

(3) $\exists x, y\in \mathbf{Z}$,使得$\sqrt{2}x+y=3$.

反思感悟 存在量词命题否定的关注点

(1)存在量词命题的否定是全称量词命题,写命题的否定时要分别改变其中的量词和判断词,即 p: $\exists x\in M, p(x)$,它的否定:$\forall x\in M, \neg p(x)$.

(2)存在量词命题的否定是全称量词命题,对省略存在量词的存在量词命题可补上量词后进行否定.

跟踪训练 2

写出下列存在量词命题的否定,并判断其否定的真假.

(1)有的素数是偶数;

(2) $\exists a, b\in \mathbf{R}, a^2+b^2\leqslant 0$.

三、全称量词命题与存在量词命题的综合应用

例 3 命题“存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$”是假命题,求实数 a 的取值范围.

反思感悟 求解含有量词的命题中参数范围的策略

(1)对于全称量词命题“$\forall x\in M,a>y$(或 $a<y$)”为真的问题,实质就是不等式恒成立问题,通常转化为求函数 y 的最大值(或最小值),即 $a>y_{max}$(或 $a<y_{min}$).

(2)对于存在量词命题“$\exists x\in M,a>y$(或 $a<y$)”为真的问题,实质就是不等式能成立问题,通常转化为求函数 y 的最小值(或最大值),即 $a>y_{min}$(或 $a<y_{max}$).

跟踪训练 3

已知命题 p:$\forall x\in\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$,都有 $x\in\{x|a-4\leqslant x\leqslant a+5\}$,且$\neg p$ 是假命题,求实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单:
   (1)全称量词命题、存在量词命题的否定;
   (2)命题真假的判断;
   (3)全称量词命题与存在量词命题的综合应用.
2. 方法归纳:转化法.
3. 常见误区:否定不唯一,命题与其否定的真假性相反.

随堂演练

1. 命题“$\forall x\in\mathbf{R},|x|+x^2\geqslant 0$”的否定是 ( )

   A. $\forall x\in\mathbf{R},|x|+x^2<0$

   B. $\forall x\in\mathbf{R},|x|+x^2\leqslant 0$

   C. $\exists x\in\mathbf{R},|x|+x^2<0$

   D. $\exists x\in\mathbf{R},|x|+x^2\geqslant 0$

2. 命题“$\exists x>0,2x^2=5x-1$”的否定是 ( )

   A. $\forall x>0,2x^2\neq 5x-1$

   B. $\forall x\leqslant 0,2x^2=5x-1$

   C. $\exists x>0,2x^2\neq 5x-1$

   D. $\exists x\leqslant 0,2x^2=5x-1$

3. 已知命题 p:实数的平方是非负数,则下列结论正确的是 ( )

   A. 命题 $\neg p$ 是真命题

   B. 命题 p 是存在量词命题

   C. 命题 p 是全称量词命题

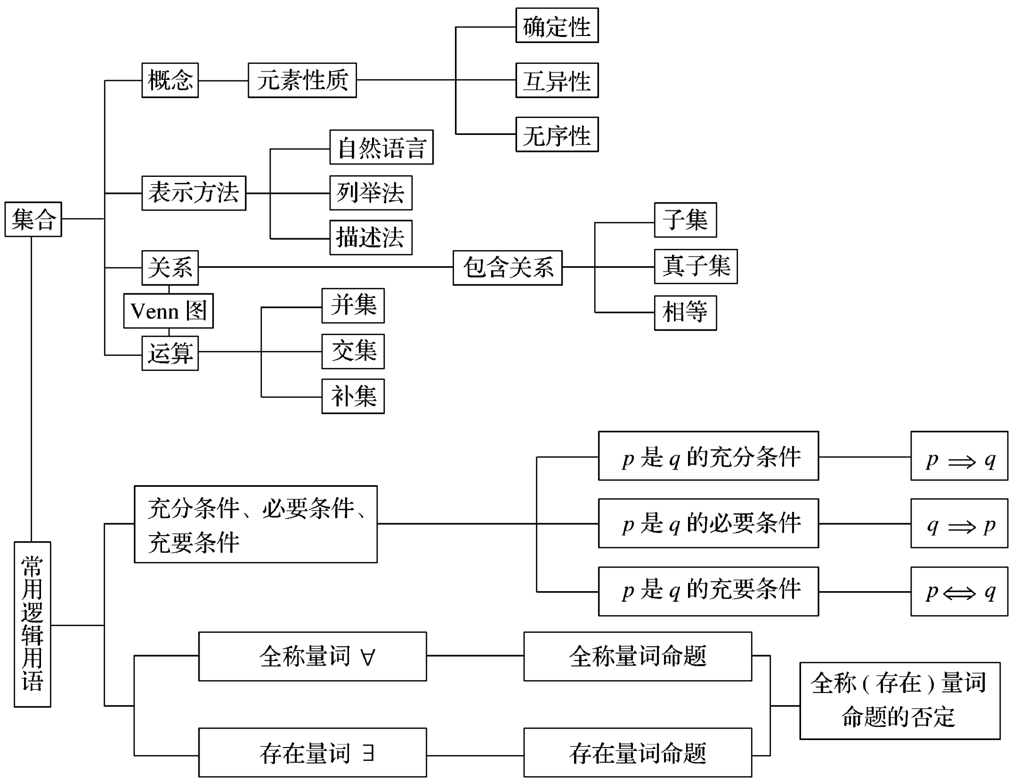
   D. 命题 p 既不是全称量词命题也不是存在量词命题

4. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-4x+a\neq 0$”为假命题,则实数 a 的取值范围是________.

提醒:完成作业 第一章 1.5 1.5.2

章末复习课

知识网络



一、集合的基本概念

1. 理解集合的概念、集合的特点、常用数集的表示、元素与集合的表示方法、元素与集合之间的关系，针对具体问题，能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合，能根据具体问题选择不同的表示方法，能在不同的表示方法之间进行转换.
2. 掌握集合的基本概念，提升逻辑推理和数学抽象素养.

例 1 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 $B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}$ 中元素的个数是 ( )

A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

跟踪训练 1

(多选)已知集合 $A=\{0,m,m^2-3m+2\}$，且 $2\in A$，则实数 m 的取值不可以为 ( )

A. 2 B. 3 C. 0 D. -2

二、集合间的基本关系

1. 集合间的基本关系包括包含、真包含、相等.能从实例中抽象并识别出子集、真子集、空集的概念，能根据集合间的关系，会利用数形结合和分类讨论的思想求参数的值或范围.
2. 掌握集合间的基本关系，提升数学抽象、逻辑推理和直观想象素养.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 1\}$，$B=\{x\mid 2a<x\leqslant a+1,a<1\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为________.

跟踪训练 2

已知集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid 1<x<m,m>1\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围是________.

三、集合的基本运算

1. 集合的运算主要包括交集、并集和补集运算.这也是高考对集合部分的主要考查点.对于较抽象的集合问题，解题时需借助 Venn 图或数轴等进行数形分析，使问题直观化、形象化，进而能使问题简捷、准确地获解.
2. 掌握集合的概念与运算，重点提升逻辑推理和数学运算素养.

例 3 (多选)已知集合 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|3-2x>0\}$,则 ( )

A. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\right\}$

B. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}\leqslant x<2\right\}$

C. $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\right\}$

D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\mathbf{R}$

跟踪训练 3

已知集合 $M=\{(x,y)|y=3x^2\}$,$N=\{(x,y)|y=5x\}$,则 $M\cap N$ 中的元素个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

四、充分条件与必要条件

1. 若 $p\Rightarrow q$,且 $q\not\Rightarrow p$ 则 p 是 q 的充分不必要条件,同时 q 是 p 的必要不充分条件;

   若 $p\Leftrightarrow q$,则 p 是 q 的充要条件,同时 q 是 p 的充要条件.

2. 掌握充要条件的判断和证明,提升逻辑推理和数学运算素养.

例 4 设集合 $A=\{x|-1<x<3\}$,集合 $B=\{x|2-a<x<2+a\}$.

(1)若 $a=2$,求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$;

(2)设命题 $p:x\in A$,命题 $q:x\in B$,若 p 是 q 成立的必要不充分条件,求实数 a 的取值范围.

跟踪训练 4

已知集合 $A=\{x|m-1<x<m^2+1\}$,$B=\{x|-2<x<2\}$.

(1)当 $m=2$ 时,求 $A\cup B$,$A\cap B$;

(2)若"$x\in A$"是"$x\in B$"成立的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

五、全称量词与存在量词

1. 全称量词命题的否定一定是存在量词命题,存在量词命题的否定一定是全称量词命题.对含有一个量词的全称量词命题和存在量词命题进行否定时,首先改变量词,把全称量词改为存在量词,把存在量词改为全称量词,然后对结论进行否定.

2. 通过含有量词的命题的否定及利用命题的真假求参数范围等,培养逻辑推理和数学运算素养.

例 5 命题:"$\forall x\in\mathbf{R},x^2\neq x$"的否定是 ( )

A. $\forall x\notin\mathbf{R},x^2=x$

B. $\forall x\notin\mathbf{R},x^2\neq x$

C. $\exists x\notin\mathbf{R},x^2\neq x$

D. $\exists x\in\mathbf{R},x^2=x$

跟踪训练 5

命题"至少有一个正实数 x 满足方程 $x^2+2(a-1)x+2a+6=0$"的否定是____________.

随堂演练

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,3,4,5\}$,$B=\{2,3,6,7\}$,则 $B\cap\complement_U A$ 等于 ( )

   A. $\{1,6\}$ B. $\{1,7\}$

   C. $\{6,7\}$ D. $\{1,6,7\}$

2. 已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$,$B=\{x|x>1\}$,则 $A\cup B$ 等于 ( )

   A. $\{x|-1<x<1\}$ B. $\{x|1<x<2\}$

   C. $\{x|x>-1\}$ D. $\{x|x>1\}$

3. 设 $a\in\mathbf{R}$,则"$a>1$"是"$a^2>1$"的 ( )

   A. 充分不必要条件

   B. 必要不充分条件

   C. 充要条件

   D. 既不充分也不必要条件

CHAPTER 2
第二章　一元二次函数、方程和不等式

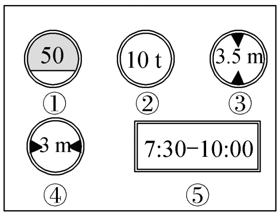
2.1　等式性质与不等式性质

第 1 课时　不等关系与不等式

【学习目标】1. 能用不等式(组)表示实际问题中的不等关系. 2. 初步学会作差法比较两实数的大小.

一、用不等式(组)表示不等关系

问题 1　生活中,我们经常看到下列标志,你知道它们的意思吗?你能用一个数学式子表示下列关系吗?



问题 2　你能用不等式或不等式组表示下列问题的不等关系吗?

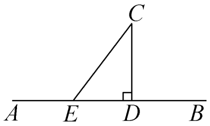
(1)某社会团体成员要求,男性成员人数 m 应不多于 50 人,女性成员人数 n 不少于 10 人;

(2)某大学生应聘某公司,要求月薪不低于 3 000;

(3)若小明身高为 x cm,小华的身高为 y cm,则小明比小华矮;

(4)三角形两边之和大于第三边,两边之差小于第三边;

(5)连接直线外一点与直线上各点的所有线段中,垂线段最短(如图).



【知识梳理】

常见的文字语言与符号语言之间的转换

文字语言	大于,高于,超过	小于,低于,少于	大于或等于,至少,不低于	小于或等于,至多,不超过
符号语言				

例 1　某汽车公司因发展需要,需购进一批汽车,计划使用不超过 1 000 万元的资金购买单价分别为 40 万元,90 万元的 A 型汽车和 B 型汽车,根据需要,A 型汽车至少买 5 辆,B 型汽车至少买 6 辆,写出满足上述所有不等关系的不等式(组).

反思感悟　用不等式(组)表示不等关系的步骤

(1)审清题意,明确表示不等关系的关键词语:至多,至少,大于等.

(2)适当的设未知数表示变量.

(3)用不等号表示关键词语,并连接变量得不等式(组).

此类问题的难点是如何正确地找出题中的隐性不等关系,如由变量的实际意义限制的范围等.

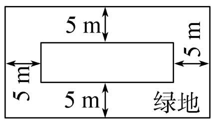
跟踪训练 1

用不等式或不等式组表示下面的不等关系.

(1)某高速公路规定通过车辆的车货总高度 h(单位:m)从地面算起不能超过 4 m;

(2)a 与 b 的和是非负实数;

(3)如图,在一个面积小于350 m^2的矩形地基中心位置上建造一个仓库,仓库的四周建成绿地,仓库的长 L(单位:m)大于宽 W(单位:m)的 4 倍.



二、作差法比较大小

问题 3 在初中,我们知道由于数轴上的点与实数一一对应,所以可以利用数轴上点的位置关系来规定实数的大小关系,具体是如何规定的呢?

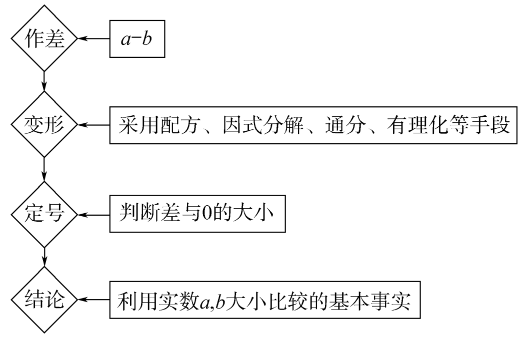
【知识梳理】

基本事实

依据	$a>b\Leftrightarrow$________ $a=b\Leftrightarrow$________ $a<b\Leftrightarrow$________
结论	要比较两个实数的大小,可以转化为比较它们的____与____的大小

例 2 比较 $2x^2+5x+3$ 与 x^2+4x+2 的大小.

反思感悟 作差法比较两个实数大小的基本步骤

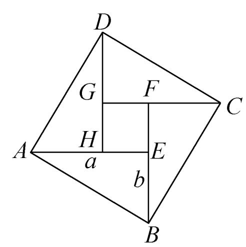


跟踪训练 2

比较 $(x+3)(x+7)$ 和 $(x+4)(x+6)$ 的大小.

三、重要不等式

问题 4 如图是由在北京召开第 24 届国际数学家大会的会标抽象出来的图形,你能比较大正方形 $ABCD$ 与四个相同的直角三角形的面积之和的大小吗?从中你能得出哪个不等式?它们之间有可能相等吗?如果相等,那么应该满足什么条件呢?



例 3 已知 $a>0,b>0$.

(1)求证:$a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$;

(2)求证:$a^3+b^3\geqslant ab^2+a^2b$.

反思感悟 比较两个数的大小关系,最基本的方法是利用作差法,通过因式分解或配方的方法,

把“差”转化成几个因式乘积的形式，通过逻辑推理得到每一个因式的符号，从而判定两个数的大小关系，通过逻辑推理进行证明.

跟踪训练 3

已知 $a>0$，求证：$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)用不等式(组)表示不等关系.

(2)作差法比较大小.

(3)重要不等式.

2. 方法归纳：作差法.

3. 常见误区：实际问题中变量的实际意义.

随堂演练

1. 某高速公路要求行驶的车辆的速度 v 的最大值为 120 km/h，同一车道上的车间距 d 不得小于 10 m，用不等式表示为 (　　)

A. $v\leqslant 120$ km/h 且 $d\geqslant 10$ m

B. $v\leqslant 120$ km/h 或 $d\geqslant 10$ m

C. $v\leqslant 120$ km/h

D. $d\geqslant 10$ m

2. 完成一项装修工程，请木工需付工资每人 50 元，请瓦工需付工资每人 40 元，现有工人工资预算 2 000 元，设木工 x 人，瓦工 y 人，则请工人满足的关系式是 (　　)

A. $5x+4y<200$　　B. $5x+4y\geqslant 200$

C. $5x+4y=200$　　D. $5x+4y\leqslant 200$

3. 设 $M=x^2$，$N=-x-1$，则 M 与 N 的大小关系是 (　　)

A. $M>N$　　B. $M=N$

C. $M<N$　　D. 与 x 有关

4. 若实数 $a>b$，则 a^2-ab________$ba-b^2$.(填“>”或“<”)

提醒：完成作业　第二章　2.1　第 1 课时

第 2 课时　等式性质与不等式性质

【学习目标】1. 了解等式的性质.　2. 掌握不等式的基本性质，并能运用这些性质解决有关问题.

一、等式性质与不等式的性质

问题　判断下列命题是否正确?

(1)如果 $a=b$，那么 $b=a$；

(2)如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$；

(3)如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$；

(4)如果 $a=b$，那么 $ac=bc$；

(5)如果 $a=b$，$c\neq 0$，那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

【知识梳理】

不等式的性质

性质	别名	性质内容	注意
1	对称性	$a>b\Leftrightarrow b$________a	$\Leftrightarrow$
2	传递性	$a>b,b>c\Rightarrow a>c$	
3	可加性	$a>b\Leftrightarrow a+c$________$b+c$	
4	可乘性	$a>b,c>0\Rightarrow$________ $a>b,c<0\Rightarrow$________	c 的符号
5	同向可加性	$a>b,c>d\Rightarrow$________	同向
6	同向同正可乘性	$a>b>0,c>d>0\Rightarrow$ ________	同向
7	可乘方性	$a>b>0\Rightarrow a^n$________b^n $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$	同正

例 1 对于实数 a,b,c,下列命题中是真命题的是 ( )

A. 若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $a>b>0$,则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. 若 $a<b<0$,则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

D. 若 $a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>0,b<0$

反思感悟 利用不等式的性质判断命题真假的注意点

(1)运用不等式的性质判断时,要注意不等式成立的条件,不要弱化条件,尤其是不能想当然随意捏造性质.

(2)解有关不等式的选择题时,也可采用特殊值法进行排除,注意取值一定要遵循如下原则:一是满足题设条件;二是取值要简单,便于验证计算.

跟踪训练 1

(多选)若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则下面四个不等式成立的有 ( )

A. $|a|>|b|$ B. $a<b$

C. $a+b<ab$ D. $a^3>b^3$

二、利用不等式的性质证明不等式.

例 2 已知 $c>a>b>0$,求证:$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

反思感悟 (1)利用不等式的性质对不等式进行证明其实质就是利用性质对不等式进行变形,变形要等价,同时要注意性质适用的前提条件.

(2)用作差法证明不等式和用作差法比较大小的方法原理一样,变形后判断符号时要注意充分利用题目中的条件.

跟踪训练 2

已知 $a>b>0,c<0$,证明:$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

三、利用不等式的性质求代数式的取值范围

例 3 已知$-6<a<8,2<b<3$,求 $2a+b,a-b$ 及$\frac{a}{b}$的取值范围.

反思感悟 利用不等式的性质求取值范围的策略

(1)建立待求范围的整体与已知范围的整体的关系,最后利用一次不等式的性质进行运算,求得待求的范围.

(2)同向不等式的两边可以相加,这种转化不是等价变形,如果在解题过程中多次使用这种转化,就有可能扩大其取值范围.

跟踪训练 3

已知 $1<a<6,3<b<4$,则 $a-b$ 的取值范围是________,$\frac{a}{b}$的取值范围是________.

【课堂小结】

1. 知识清单:

 (1)等式的性质.

 (2)不等式的性质及其应用.

2. 方法归纳:作商比较法、乘方比较法.

3. 常见误区：注意不等式性质的单向性或双向性，即每条性质是否具有可逆性.

随堂演练

1. 与 $a>b$ 等价的不等式是 ( )

A. $|a|>|b|$　　B. $a^2>b^2$

C. $\frac{a}{b}>1$　　D. $a^3>b^3$

2. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题正确的是 ( )

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $\left.\begin{matrix}a>b\\ ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D. $\left.\begin{matrix}ab>0\\ a>b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

3. 若 $1<a<3,-4<b<2$，那么 $a-|b|$ 的范围是 ( )

A. $-3<a-|b|\leqslant 3$　　B. $-3<a-|b|<5$

C. $-3<a-|b|<3$　　D. $1<a-|b|<4$

4. 用不等号“$>$”或“$<$”填空：

(1) 如果 $a>b,c<d$，那么 $a-c$________$b-d$；

(2) 如果 $a>b>0,c<d<0$，那么 ac________bd；

(3) 如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a^2}$________$\frac{1}{b^2}$；

(4) 如果 $a>b>c>0$，那么 $\frac{c}{a}$________$\frac{c}{b}$.

提醒：完成作业　第二章　2.1　第 2 课时

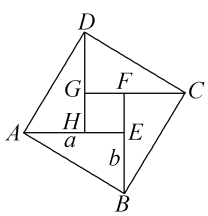
2.2　基本不等式

第 1 课时　基本不等式

【学习目标】 1. 了解基本不等式的证明过程.　2. 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

一、基本不等式的证明与理解

问题 1　如图是不等式第一节课我们抽象出来的在北京召开第 24 届国际数学家大会的会标，你还记得我们得出什么样的结论吗？



问题 2　现在我们讨论一种特别的情况，如果 $a>0,b>0$，我们用 $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 分别替换上式中的 a,b，能得到什么样结论？

问题 3　上述不等式是在重要不等式基础上转化出来的，是否对所有的 $a>0,b>0$ 都能成立？请给出证明.

【知识梳理】

1. 基本不等式：如果 $a>0,b>0$，那么________，当且仅当________时，等号成立.

2. 其中________叫做正数 a,b 的算术平均数，________叫做正数 a,b 的几何平均数.

3. 两个正数的算术平均数________它们的几何平均数.

二、求简单代数式的最值

例 1　已知 $x>0$，求 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值.

反思感悟 在利用基本不等式求最值时要注意三点

一是各项均为正;二是寻求定值,求和式最小值时应使积为定值(恰当变形,合理拆分项或配凑因式是常用的解题技巧);三是考虑等号成立的条件是否具备,检验多项式取得最值时的 x 的值是否为已知范围内的值,三点缺一不可.

跟踪训练 1

(多选)下面四个推导过程中正确的有 ( )

A. 若 a,b 为正实数,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

B. 若 $a\in\mathbf{R}$,$a\neq 0$,则$\frac{4}{a}+a\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot a}=4$

C. 若 $x,y\in\mathbf{R}$,$xy<0$,则$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\left[\left(-\frac{x}{y}\right)+\left(-\frac{y}{x}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)}=-2$

D. 若 $a<0$,$b<0$,则$\frac{a^2+b^2}{2}\leqslant ab$

三、最值定理

问题 4 你能写出基本不等式的几种变形吗?

【知识梳理】

最值定理

(1)已知 x,y 都为正数,则(1)如果积 xy 等于定值 P,那么当且仅当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 有最小值________;

(2)如果和 $x+y$ 等于定值 S,那么当且仅当 $x=y$ 时,积 xy 有最大值________,简记为:积定和最小,和定积最大.

例 2 (1)设 $x>0$,$y>0$,且 $x+y=18$,则 xy 的最大值为 ( )

A. 80　　B. 77　　C. 81　　D. 82

(2)已知 $0<x<\frac{1}{2}$,则 $y=x(1-2x)$ 的最大值为________.

反思感悟 通过拼凑法利用基本不等式求最值的策略

拼凑法的实质在于代数式的灵活变形,拼系数、凑常数是关键,利用拼凑法求最值应注意以下几个方面:①拼凑的技巧,以整式为基础,注意利用系数的变化以及等式中常数的调整,做到等价转换;②代数式的变形以拼凑出和或积的定值为目标;③拆项、添项应注意检验利用基本不等式的前提.

跟踪训练 2

(1)当 x 取什么值时,$x^2+\frac{1}{x^2}$取得最小值?最小值是多少?

(2)已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$,求 $1-x^2$的最大值.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)基本不等式的推导与证明.

(2)求简单代数式的最值.

(3)最值定理.

2. 方法归纳:拼凑法.

3. 常见误区:利用基本不等式的条件"一正、二

定、三相等”缺一不可，尤其是“当且仅当，等号成立”这八个字，更是不能缺少.

随堂演练

1. 不等式 $a^2+1\geqslant 2a$ 中等号成立的条件是 ( )

A. $a=\pm 1$　　B. $a=1$

C. $a=-1$　　D. $a=0$

2. 已知 $x<0$，则 $x+\dfrac{1}{x}-2$ 有 ( )

A. 最大值为 0　　B. 最小值为 0

C. 最大值为 -4　　D. 最小值为 -4

3. 若 a,b 都是正数，则 $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{4a}{b}\right)$ 的最小值为 ( )

A. 5　　B. 7

C. 9　　D. 13

4. 当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时，下列不等关系成立的是________.

①$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$；②$a-b\geqslant 2\sqrt{ab}$；③$a^2+b^2\geqslant 2ab$；④$a^2-b^2\geqslant 2ab$.

提醒：完成作业　第二章　2.2　第 1 课时

习题课　基本不等式

【学习目标】 1. 熟练掌握基本不等式及其变形的应用.　2. 能利用基本不等式证明简单的不等式及比较代数式的大小.

一、利用基本不等式比较大小

例 1　已知 $0<a<b<1$，$P=\dfrac{a+b}{2}$，$Q=\sqrt{ab}$，$M=\sqrt{a+b}$，那么 P,Q,M 的大小顺序是 ( )

A. $P>Q>M$　　B. $M>P>Q$

C. $Q>M>P$　　D. $M>Q>P$

反思感悟　运用基本不等式比较大小的注意点

(1)要灵活运用基本不等式，特别注意其变形.

(2)应注意成立的条件，即 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a>0,b>0$，等号成立的条件是 $a=b$；$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立的条件是 $a,b\in\mathbf{R}$，等号成立的条件是 $a=b$.

跟踪训练 1

设 a,b 为非零实数，给出下列不等式：

①$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$；②$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$；③$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{ab}{a+b}$；

④$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$.

其中恒成立的是________.(填序号)

二、巧用“1”的代换求最值问题

例 2　已知 $a>0,b>0,a+2b=1$，求 $t=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值.

反思感悟　常数代换法：常数代换法解题的关键是通过代数式的变形，构造和式或积式为定值的式子，然后利用基本不等式求解最值. 应用此种方法求解最值时，应把“1”的表达式与所求最值的表达式相乘求积或相除求商.

跟踪训练 2

已知 $x>0,y>0,x+8y=xy$，求 $x+2y$ 的最小值.

三、利用基本不等式证明不等式

例 3 (1)设 a,b,c 均为正数,且 $a+b+c=1$,证明:$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\leqslant 1$;

(2)已知 a,b,c,d 均为正数.求证:$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\geqslant 16abcd$.

反思感悟 利用基本不等式证明不等式的策略与注意事项

(1)策略:从已证不等式和问题的已知条件出发,借助不等式的性质和有关定理,经过逐步的逻辑推理,最后转化为所求问题,其特征是以“已知”看“可知”,逐步推向“未知”.

(2)注意事项:①多次使用基本不等式时,要注意等号能否成立;②巧用“1”的代换证明不等式;③对不能直接使用基本不等式的证明可重新组合,形成基本不等式模型,再使用.

跟踪训练 3

已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$,求证:$a+b\geqslant 2$.

【课堂小结】

1. 知识清单:
   (1)利用基本不等式比较大小.
   (2)巧用“1”的代换求最值问题.
   (3)利用基本不等式证明不等式.
2. 方法归纳:配凑法.
3. 常见误区:一正、二定、三相等,常因缺少条件或符号导致错误.

随堂演练

1. 已知 $0<a<1,0<b<1$,且 $a\neq b$,下列各式中最大的是 ( )

A. a^2+b^2　　B. $2\sqrt{ab}$

C. $2ab$　　D. $a+b$

2. 若 $0<a<b$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

B. $b>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>a$

C. $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$

D. $b>a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

3. 已知 x,y 是正数且 $x+y=1$,则 $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{y+1}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{13}{15}$　　B. $\frac{9}{4}$

C. 2　　D. 3

4. 周长为 $\sqrt{2}+1$ 的直角三角形面积的最大值为________.

第 2 课时　基本不等式在实际问题中的应用

【学习目标】1. 熟练掌握基本不等式及变形的应用. 2. 会用基本不等式解决生活中简单的最大(小)值问题. 3. 能够运用基本不等式解决几何中的应用问题.

一、基本不等式在生活中的应用

问题 利用基本不等式求最大(小)值时,应注意哪些问题?

例 1 小明的爸爸要在家用围栏做一个面积为 $16\ m^2$ 的矩形游乐园,当这个矩形的长和宽各为多少时,所用围栏最省?并求所需围栏的长度.

反思感悟 利用基本不等式解决实际问题的步骤

(1) 理解题意,设变量,并理解变量的实际意义;

(2) 构造定值,利用基本不等式求最值;

(3) 检验,检验等号成立的条件是否满足题意;

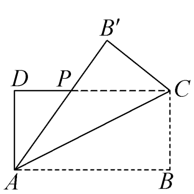
(4) 结论.

跟踪训练 1

要制作一个容积为 $4\ m^3$,高为 $1\ m$ 的无盖长方体容器,已知该容器的底面造价是每平方米 20 元,侧面造价是每平方米 10 元,求该容器的最低总造价.

二、基本不等式在几何中的应用

例 2 如图,设矩形 $ABCD(AB>BC)$ 的周长为 24,把它沿 AC 翻折,翻折后 AB' 交 DC 于点 P,设 $AB=x$.



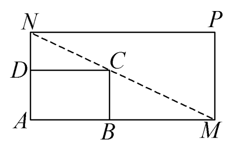
(1)用 x 表示 DP,并求出 x 的取值范围;

(2)求 $\triangle ADP$ 面积的最大值及此时 x 的值.

反思感悟 在利用基本不等式求最值时,要特别注意"拆、拼、凑"等技巧,使其满足基本不等式中"正"(即条件中要求字母为正数)、"定"(不等式的另一边必须为定值)、"等"(等号取得的条件)的条件才能应用,否则会出现错误.

跟踪训练 2

如图所示,将一矩形花坛 $ABCD$ 扩建为一个更大的矩形花坛 $AMPN$,要求点 B 在 AM 上,点 D 在 AN 上,且对角线 MN 过点 C,已知 $AB=4$ 米,$AD=3$ 米,当 $BM=$ ________ 米时,矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小.



【课堂小结】

1. 知识清单:

  (1) 基本不等式在生活中的应用.

  (2) 基本不等式在几何中的应用.

2. 方法归纳:配凑法.

3. 常见误区:生活中的变量有它自身的意义,容易忽略变量的取值范围.

随堂演练

1. 用一段长为 8 cm 的铁丝围成一个矩形模型,则这个模型的最大面积为 ( )

   A. $9\ cm^2$ B. $16\ cm^2$ C. $4\ cm^2$ D. $5\ cm^2$

2. 港珠澳大桥通车后,经常往来于珠港澳三地的刘先生采用自驾出行. 由于燃油的价格有

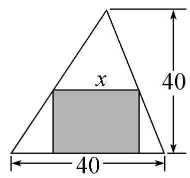
升也有降,现刘先生有两种加油方案,第一种方案:每次均加 30 升的燃油;第二种方案:每次加 200 元的燃油,则下列说法正确的是 (　　)

A. 采用第一种方案划算
B. 采用第二种方案划算
C. 两种方案一样
D. 无法确定

3. 某工厂生产某种产品,第一年产量为 A,第二年的增长率为 a,第三年的增长率为 b,这两年的平均增长率为 x(a,b,x 均大于零),则 (　　)

A. $x=\frac{a+b}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{a+b}{2}$
C. $x>\frac{a+b}{2}$　　D. $x\geqslant\frac{a+b}{2}$

4. 在如图所示的锐角三角形空地中,欲建一个内接矩形花园(阴影部分),矩形花园面积的最大值为________.



提醒:完成作业　第二章　2.2　第 2 课时

2.3　二次函数与一元二次方程、不等式

第 1 课时　二次函数与方程

【学习目标】1. 能熟练运用十字相乘法分解因式. 2. 掌握二次函数的表达式与图象. 3. 理解一元二次函数与一元二次方程的关系.

一、十字相乘法因式分解

例 1　分解下列因式:

(1) x^2+4x+3;
(2) $5x^2-6x+1$;
(3) $m^2+2mn-3n^2$;
(4) $ax^2+(a-1)x-1(a\neq0)$.

跟踪训练 1

(1) 因式分解:$x^2+3x-10=$________.
(2) 因式分解:$x^2-(a^2+a+1)x+a^2(a+1)$.

二、一元二次方程

问题 1　请同学们写出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式以及根与系数的关系.

例 2　求下列方程的根:

(1) $x^2+3x+2=0$;
(2) $x^2+x-1=0$;
(3) $ax^2+(a+1)x+1=0(a\neq0)$.

跟踪训练 2

已知一元二次方程 $2x^2-6x-1=0$ 的两实数根为 x_1,x_2，不解方程，求代数式$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的值.

三、二次函数与图象

问题 2 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式 Δ 有什么关系?

例 3 已知二次函数 $y=(k-3)x^2+2x+1$ 的图象与 x 轴有交点，则 k 的取值范围是 ( )

A. $k<4$ B. $k\leq4$

C. $k<4$ 且 $k\neq3$ D. $k\leq4$ 且 $k\neq3$

反思感悟 (1) 会通过 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号判断二次函数的图象与 x 轴交点的个数，

(2) 二次项系数含参时，要注意题目中是否强调是二次函数，如没有强调，需分类讨论.

跟踪训练 3

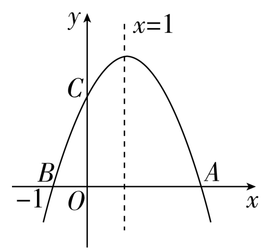
(多选)如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于 C 点，且对称轴为直线 $x=1$，点 B 坐标为 $(-1,0)$，则下面结论中正确的是 ( )

A. $2a+b=0$

B. $4a-2b+c<0$

C. $b^2-4ac>0$

D. 当 $y<0$ 时，$x<-1$ 或 $x>4$



【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)十字相乘法因式分解.

(2)一元二次方程.

(3)二次函数与图象.

2. 方法归纳:观察法，图象法.

3. 常见误区:二次项系数含参时，要注意是否需要对二次项系数进行讨论.

随堂演练

1. 若多项式 $x^2+kx-24$ 可以因式分解为 $(x-3)\cdot(x+8)$，则实数 k 的值为 ( )

A. 5 B. -5

C. 11 D. -11

2. 函数 $y=-(x-1)^2+4$ 的图象的顶点坐标是 ( )

A. $(-1,4)$

B. $(-1,-4)$

C. $(1,-4)$

D. $(1,4)$

3. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-x+1=0$ 有实数根，则 k 的取值范围是 ( )

A. $k>\frac{1}{4}$ B. $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq0$

C. $k\leq\frac{1}{4}$ 且 $k\neq0$ D. $k<\frac{1}{4}$

4. 已知方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1^2+x_2^2=$________.

提醒:完成作业 第二章 2.3 第1课时

第 2 课时　二次函数与一元二次方程、不等式

【学习目标】 1. 从函数观点看一元二次方程.了解函数的零点与方程根的关系.　2. 从函数观点看一元二次不等式. 经历从实际情景中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义.　3. 借助二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

一、一元二次不等式的定义

问题 1　园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉. 若栅栏的长度是 24 m,围成的矩形区域的面积要大于 20 m^2,则这个矩形的一条边长多少米?

【知识梳理】

定义	一般地,我们把只含有一个________,并且未知数的最高次数是________的不等式,叫做一元二次不等式.
一般形式	$ax^2+bx+c>0$,$ax^2+bx+c<0$,$ax^2+bx+c\geqslant 0$,$ax^2+bx+c\leqslant 0$,其中 $a\neq 0$,a,b,c 均为常数.

二、一元二次不等式的解法

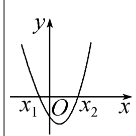
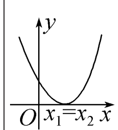
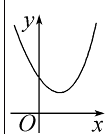
问题 2　如课本 P51 图 2.3-1,二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的图象与 x 轴有两个交点,这与方程 $x^2-12x+20=0$ 的根有什么关系?

【知识梳理】

一般地,对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$,我们把使________的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的________.

问题 3　你能从二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的图象上找 $x^2-12x+20<0$ 的解集吗?

【知识梳理】

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 x_1,$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集		$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$	
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集			

例 1　解下列不等式:

(1) $-2x^2+x-6<0$;

(2) $-x^2+6x-9\geqslant 0$;

(3) $x^2-2x-3>0$.

反思感悟 解不含参数的一元二次不等式的一般步骤

(1)化标准. 通过对不等式变形,使不等式的右侧为 0,使二次项系数为正.

(2)判别式. 对不等式的左侧进行因式分解,若不能分解,则计算对应方程的根的判别式.

(3)求实根.求出相应的一元二次方程的根或根据判别式说明方程无实数根.

(4)画草图.根据一元二次方程根的情况画出对应的二次函数的草图.

(5)写解集. 根据图象写出不等式的解集.

跟踪训练 1

解下列不等式:

(1)$x^2-5x-6>0$;

(2)$(2-x)(x+3)<0$.

三、含参的一元二次不等式的解法

例 2 解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(x\in\mathbf{R})$.

反思感悟 在解含参数的一元二次型的不等式时,往往要对参数进行分类讨论,为了做到分类"不重不漏",讨论需从如下三个方面进行考虑:

(1)关于不等式类型的讨论:二次项系数 $a>0$,$a<0$,$a=0$.

(2)关于不等式对应的方程根的讨论:两不同实根($\Delta>0$),两相同实根($\Delta=0$),无根($\Delta<0$).

(3)关于不等式对应的方程根的大小的讨论 $x_1>x_2$,$x_1=x_2$,$x_1<x_2$.

跟踪训练 2

解关于 x 的不等式 $x^2-(3a-1)x+(2a^2-2)>0$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

 (1)一元二次不等式的概念及解法.

 (2)含参的一元二次不等式的解法.

2. 方法归纳:数形结合、分类讨论.

3. 常见误区:解含参数的二次不等式时找不到分类讨论的标准.

随堂演练

1. 函数 $y=x^2-4x+4$ 的零点是 ( )

 A. $(2,0)$ B. $(0,4)$ C. $x=\pm 2$ D. $x=2$

2. 不等式 $3x^2-2x+1>0$ 的解集为 ( )

 A. $\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{1}{3}\right\}$ B. $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}<x<1\right\}$

 C. $\varnothing$ D. $\mathbf{R}$

3. 不等式 $3+5x-2x^2\leqslant 0$ 的解集为 ( )

 A. $\left\{x\,\middle|\,x>3 \text{ 或 } x<-\frac{1}{2}\right\}$

 B. $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3\right\}$

 C. $\left\{x|x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -\frac{1}{2}\right\}$

 D. $\mathbf{R}$

4. 若 $0<m<1$,则不等式 $(x-m)\left(x-\frac{1}{m}\right)<0$ 的解集为________.

提醒:完成作业 第二章 2.3 第 2 课时

第 3 课时　一元二次不等式的应用

【学习目标】 1. 熟练掌握分式不等式的解法. 2. 理解一元二次方程、二次函数、二次不等式之间的关系. 3. 构建二次函数模型，解决实际问题.

一、解简单的分式不等式

问题　$\frac{x-3}{x+2}>0$ 与 $(x-3)(x+2)>0$ 等价吗？

$\frac{x-3}{x+2}\geqslant 0$ 与 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$ 等价吗？

例 1　解下列不等式：

(1) $\frac{x+1}{2x-1}<0$；

(2) $\frac{1-x}{3x+5}\geqslant 0$；

(3) $\frac{x-1}{x+2}>1$.

反思感悟　分式不等式的解法

(1) 对于比较简单的分式不等式，可直接转化为一元二次不等式或一元二次不等式组求解，但要注意等价变形，保证分母不为零.

(2) 对于不等号右边不为零的较复杂的分式不等式，先移项，再通分（不要去分母），使之转化为不等号右边为零的形式，然后用上述方法求解.

跟踪训练 1

解下列不等式：

(1) $\frac{x+1}{x-3}\geqslant 0$；

(2) $\frac{5x+1}{x+1}<3$.

二、二次函数与一元二次方程、不等式间的关系及应用

例 2　已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$，求关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

反思感悟　已知以 a,b,c 为参数的不等式（如 $ax^2+bx+c>0$）的解集，求解其他不等式的解集时，一般遵循：

(1) 根据解集来判断二次项系数的符号.

(2) 根据根与系数的关系把 b,c 用 a 表示出来并代入所要解的不等式.

(3) 约去 a，将不等式化为具体的一元二次不等式求解.

跟踪训练 2

已知不等式 $ax^2+5x+b>0$ 的解集是 $\{x|2<x<3\}$，则不等式 $bx^2-5x+a>0$ 的解集是________.

三、一元二次不等式的实际应用

例 3　某种汽车在水泥路面上的刹车距离（刹车距离是指汽车刹车后由于惯性往前滑行的距离）s(m) 和汽车刹车前的车速 x(km/h) 有如下关系：$s=-2x+\frac{1}{18}x^2$，在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离不小于 22.5 m，那么这辆汽车刹车前的车速至少为多少？

跟踪训练 3

某施工单位在对一个长 800 m,宽 600 m 的草坪进行绿化时,是这样想的:中间为矩形绿草坪,四周是等宽的花坛,如图所示,若要保证绿草坪的面积不小于总面积的$\frac{1}{2}$,试确定花坛宽度的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)简单的分式不等式的解法.

(2)二次函数与一元二次方程、不等式间的关系及应用.

(3)一元二次不等式的实际应用.

2. 方法归纳:转化、恒等变形.

3. 常见误区:

(1)解分式不等式要等价变形.

(2)利用一元二次不等式解决实际问题时,应注意实际意义.

随堂演练

1. 不等式$\frac{x-1}{x+2}<0$的解集为 ( )

A. $\{x|x>1\}$

B. $\{x|x<-2\}$

C. $\{x|-2<x<1\}$

D. $\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$

2. 不等式$\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0$的解集为 ( )

A. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

B. $\{x|-1\leqslant x<1\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x<1\}$

3. 已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x|-2<x<1\}$,那么不等式 $cx^2-ax+b>0$ 的解集为( )

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<1\right\}$

B. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}\text{或 }x>1\right\}$

C. $\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{x\middle|x<-1\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right\}$

4. 某商品在最近 30 天内的价格 y_1 与时间 t(单位:天)的关系式是 $y_1=t+10(0<t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})$;销售量 y_2 与时间 t 的关系式是 $y_2=-t+35(0<t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})$,则使这种商品日销售金额 z 不小于 500 元的 t 的取值范围为________.

提醒:完成作业 第二章 2.3 第 3 课时

习题课 不等式恒成立、能成立问题

【学习目标】会用判别式法、分离参数法、数形结合等方法解决不等式中的恒成立、能成立问题.

一、在 R 上的恒成立问题

例 1 已知不等式 $kx^2+2kx-(k+2)<0$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

跟踪训练 1

若关于 x 的不等式 $kx^2+3kx+k-2\leqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $\left\{k\middle|-\frac{4}{5}\leqslant k<0\right\}$

B. $\left\{k\middle|-\frac{8}{5}\leqslant k<0\right\}$

C. $\left\{k\middle|-\frac{4}{5}\leqslant k\leqslant 0\right\}$

D. $\left\{k\middle|-\frac{8}{5}\leqslant k\leqslant 0\right\}$

二、在给定区间上恒成立的问题

例 2 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

跟踪训练 2

若对任意的 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 都有 $ax^2-x-3<0$ 成立,则实数 a 的取值范围是________.

三、解决简单的能成立问题

例 3 当 $1<x<2$ 时,关于 x 的不等式 $x^2+mx+4>0$ 有解,则实数 m 的取值范围为________.

跟踪训练 3

若存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $\dfrac{4x+m}{x^2-2x+3}\geqslant 2$ 成立,求实数 m 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1) 在 $\mathbf{R}$ 上的恒成立问题.

(2) 给定区间上的恒成立问题.

(3) 解决简单的能成立问题.

2. 方法归纳:等价转换,数形结合.

3. 常见误区:要注意端点值的取舍.

随堂演练

1. 若不等式 $x^2+mx+1\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $m\geqslant 2$

B. $m\leqslant -2$

C. $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$

D. $-2\leqslant m\leqslant 2$

2. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$,$\sqrt{mx^2+2mx+2}$ 都有意义,则 m 的取值范围是 ( )

A. $m\geqslant 2$

B. $0<m\leqslant 2$

C. $0\leqslant m\leqslant 2$

D. $0\leqslant m\leqslant 4$

3. 已知 $1\leqslant x\leqslant 2$,$x^2-ax>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a\geqslant 1$

B. $a>1$

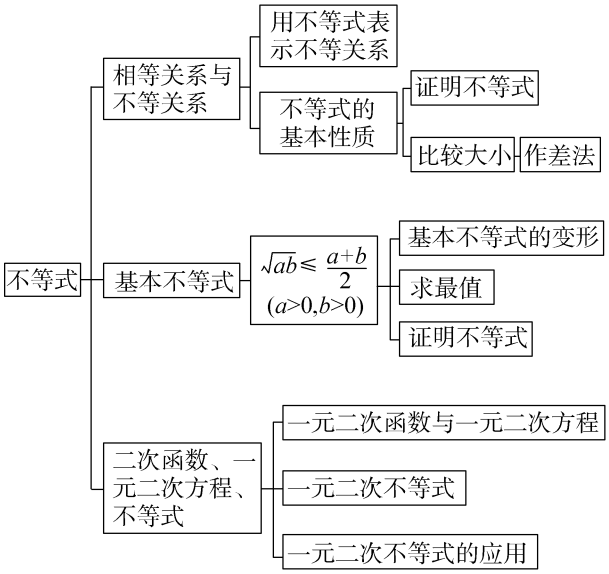
C. $a\leqslant 1$

D. $a<1$

4. 定义运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,则不等式 $\begin{vmatrix} ax & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

章末复习课

知识网络



一、不等式及其性质

1. 不等式的性质常用来比较大小、判断与不等式有关的命题的真假和证明不等式,防止由于考虑不全面出现错误,有时也可结合特殊值法求解.
2. 掌握不等式的性质,重点提升数学抽象和逻辑推理素养.

例 1 若 $A=a^2+3ab$, $B=4ab-b^2$,则 A,B 的大小关系是 ( )

A. $A\leqslant B$　　B. $A\geqslant B$

C. $A<B$ 或 $A>B$　　D. $A>B$

跟踪训练 1

若 $1\leqslant a\leqslant 5$, $-1\leqslant b\leqslant 2$,则 $a-b$ 的取值范围为________.

二、利用基本不等式求最值

1. 基本不等式:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$是每年高考的热点,主要考查命题判断、不等式证明以及求最值问题,特别是求最值问题往往与实际问题相结合,同时在基本不等式的使用条件上设置一些问题,实际上是考查学生恒等变形的技巧,另外,基本不等式的和与积的转化在高考中也经常出现.
2. 熟练掌握基本不等式的应用,重点提升数学抽象和数学运算素养.

例 2 若 $x>0$,则 $x+\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2}$ 的最小值是________.

跟踪训练 2

已知函数 $y=x-4+\frac{9}{x+1}(x>-1)$,当 $x=a$ 时,y 取得最小值 b,则 $a=$________;$b=$________.

三、一元二次不等式的解法

1. 对于实数的一元二次不等式(分式不等式)首先转化为标准形式(二次项系数为正),然后能分解因式变成因式相乘的形式,从而得到不等式的解集.
2. 对于含参数的不等式要注意对参数进行讨论,做到不重不漏.
3. 掌握不等式的解法,重点提升逻辑推理和数学运算素养.

例 3 若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$.

(1)求 a 的值;

(2)求不等式$\frac{1-ax}{x+1}>a+5$ 的解集.

跟踪训练 3

解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

四、不等式恒成立问题

1. 一般是指一元二次不等式恒成立的问题，即

$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$

$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$

$ax^2+bx+c\geqslant0(a\neq0)$ 恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ \Delta\leqslant0,\end{cases}$

$ax^2+bx+c\leqslant0(a\neq0)$ 恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ \Delta\leqslant0.\end{cases}$

对于含参数的不等式要注意对参数进行讨论，做到不重不漏.

2. 掌握不等式恒成立的条件，重点提升逻辑推理和数学运算素养.

例 4　已知函数 $y=x^2+ax+3$.

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y\geqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2) 当 $a\in[4,6]$ 时，$y\geqslant0$ 恒成立，求 x 的取值范围.

跟踪训练 4

已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y}=2$，若 $x+2y>m^2-3m-1$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant4$　　B. $m\leqslant-4$ 或 $m\geqslant1$

C. $-1<m<4$　　D. $-4<m<1$

五、通过构造数学模型解决生活中的问题

1. 不等式的应用题常以函数为背景，多是解决现实生活、生产中的优化问题，在解题中主要涉及不等式的解法、基本不等式求最值，根据题设条件构建数学模型是解题关键.

2. 利用不等式解决实际应用问题，重点提升数学建模素养和数学运算素养.

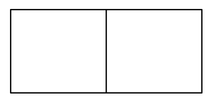
例 5　某商品的成本价为 80 元/件，售价为 100 元/件，每天售出 100 件，若售价降低 x 成（1 成 =10%），售出商品的数量就增加 $\frac{8}{5}x$ 成，要求售价不能低于成本价.

(1) 设该商品一天的营业额为 y，试求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 若再要求该商品一天营业额至少为 10 260 元，求 x 的取值范围.

跟踪训练 5

某自来水厂拟建一座平面图为矩形且面积为 200 m^{2}的二级净水处理池（如图）. 池的深度一定，池的外围墙壁建造单价为 400 元/m，中间的一条隔壁建造单价为 100 元/m，池底建造单价为 60 元/m^2，池壁厚度忽略不计. 问：净水池的长为多少时，可使总造价最低？



随堂演练

1. 下列命题中，正确的是（　　）

A. 若 $ac<bc$，则 $a<b$

B. 若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

C. 若 $a>b>0$，则 $a^2>b^2$

D. 若 $a<b$，$c<d$，则 $a-c<b-d$

2. 不等式 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant0$ 的解集为（　　）

A. $\left\{x\middle|x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2\right\}$

C. $\{x|x\geqslant3\}$

D. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2\right\}\cup\{x|x\geqslant3\}$

3. 已知命题 p：$\frac{1}{a}>\frac{1}{4}$，命题 q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+ax+1>0$，则 p 成立是 q 成立的________.

函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念(一)

【学习目标】1. 在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上,用集合语言和对应关系刻画函数,建立完整的函数概念. 2. 体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用. 3. 了解构成函数的要素,能求简单函数的定义域.

一、函数的概念

问题 1 阅读课本 P60 上的问题 1 和 P61 上的问题 2,并思考它们有什么异同点?

问题 2 请同学们继续阅读课本上的问题 3 和问题 4,它们分别是函数吗?如果是,请指出它们与问题 1 和问题 2 中的函数的区别.

问题 3 通过对 4 个问题的分析,你能说出它们有什么不同点和共同点吗?

【知识梳理】

函数的概念

<table>
<tr><td colspan="2">概念</td><td>一般地,设 A,B 是非空的________,如果对于集合 A 中的________,按照某种________的对应关系 f,在集合 B 中都有________的数 y 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">三要素</td><td>对应关系</td><td>$y=f(x)$,$x\in A$</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td>________的取值范围</td></tr>
<tr><td>值域</td><td>与 x 的值相对应的________值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$</td></tr>
</table>

例 1 (1)(多选)下列集合 A 到集合 B 的对应关系 f 是函数的是 ( )

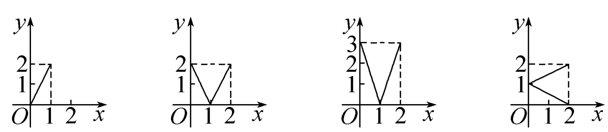
A. $A=\{-1,0,1\}$,$B=\{0,1\}$,f:A 中的数平方

B. $A=\{0,1\}$,$B=\{-1,0,1\}$,f:A 中的数开方

C. $A=\mathbf{Z}$,$B=\mathbf{Q}$,f:A 中的数取倒数

D. $A=\mathbf{R}$,$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$,f:A 中的数取绝对值

(2)设 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$,给出下列四个图形:

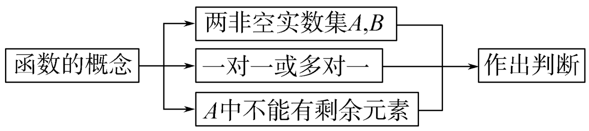


① ② ③ ④

其中,能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

反思感悟 (1)判断一个对应关系是否为函数的方法



(2)根据图形判断对应关系是否为函数的方法

①任取一条垂直于 x 轴的直线 l;

②在定义域内平行移动直线 l;

③若 l 与图形有且只有一个交点,则是函数;若在定义域内没有交点或有两个或两个以上的交点,则不是函数,

跟踪训练 1

已知集合 $M=\{-1,1,2,4\}$,$N=\{1,2,4\}$,给出下列四个对应关系,其中能构成从 M 到 N 的函数的是 ( )

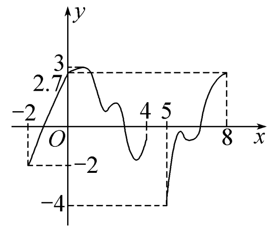
A. $y=x^2$ B. $y=x+1$ C. $y=x-1$ D. $y=|x|$

二、函数的三要素

问题 4 初中我们学习过哪些函数?

问题 5 你能说一说问题 4 中的几个函数的定义域、对应关系和值域分别是什么吗?

例 2 (1)已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则该函数的定义域为________,值域为________.



(2)若已知函数 $f(x)=x^2,x\in\{-1,0,1\}$,则函数的值域为________.

反思感悟 关于函数的三要素

(1)函数的定义域即集合 A,在坐标系中是横坐标 x 的取值范围.

(2)函数的值域并不是集合 B,是函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$,在坐标系中是纵坐标的取值范围.

(3)函数的对应关系 f 反映了自变量 x 的运算、对应方法,通过这种运算,对应得到唯一的函数值 y.

跟踪训练 2

函数 $y=f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$ 的值域是 ( )

A. $\mathbf{R}$

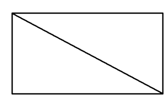
B. $\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}$

C. $\{-1,1\}$

D. $\{-1,0,1\}$

三、构建问题情境

例 3 已知矩形的面积为 10,如图所示,试借助该图形构建问题情境描述下列变量关系.



(1)$f(x)=\dfrac{10}{x}$;

(2)$f(x)=2x+\dfrac{20}{x}$;

(3)$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

跟踪训练 3

构建一个问题情境，使其中的变量关系能用解析式 $y=2\sqrt{x}$ 来描述.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1) 函数的概念；

(2) 函数的三要素；

(3) 构建问题情境.

2. 方法归纳：定义法、图象法.

3. 常见误区：函数概念的理解.

随堂演练

1. 对于函数 $f:A\to B$，若 $a\in A$，$b\in A$，则下列说法错误的是 ( )

A. $f(a)\in B$

B. $f(a)$ 有且只有一个

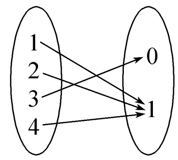
C. 若 $f(a)=f(b)$，则 $a=b$

D. 若 $a=b$，则 $f(a)=f(b)$

2. 下列对应或关系式中是 A 到 B 的函数的是 ( )

A. $A\in\mathbf{R}$，$B\in\mathbf{R}$，$x^2+y^2=1$

B. $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{0,1\}$，对应关系如图：



C. $A\in\mathbf{R}$，$B\in\mathbf{R}$，$f:x\to y=\dfrac{1}{x-2}$

D. $A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}$，$f:x\to y=\sqrt{2x-1}$

3. 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=2\ 021$ 的公共点有 ( )

A. 0 个

B. 1 个

C. 0 个或 1 个

D. 以上答案都不对

4. 若函数 $y=x^2-3x$ 的定义域为 $\{-1,0,2,3\}$，则其值域为________.

提醒：完成作业　第三章　3.1　3.1.1

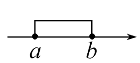
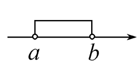
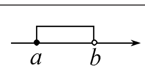
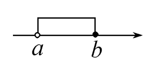
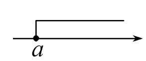
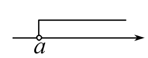
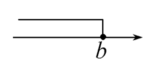
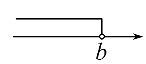
3.1.1　函数的概念(二)

【学习目标】 1. 会判断两个函数是否为同一个函数.　2. 能正确使用区间表示数集.　3. 会求一些简单函数的定义域.

一、区间的概念

【知识梳理】

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，规定如下：

区间	数轴表示
	
	
	
	
$[a,+\infty)$	
$(a,+\infty)$	
$(-\infty,b]$	
$(-\infty,b)$	

例 1　把下列数集用区间表示：

(1) $\{x|x\geqslant-1\}$；

(2) $\{x|x<0\}$;

(3) $\{x|-1<x<1\}$;

(4) $\{x|0<x<1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 4\}$.

跟踪训练 1

(1) 集合 $\{x|-2<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0\}$ 用区间表示为________.

(2) 已知区间 $(a^2+a+1,7]$,则实数 a 的取值范围是________.

二、求函数的定义域与值

例 2 (1) 函数 $f(x)=\sqrt{x(x-1)}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为________.

(2) 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$,则 $f(2)=$________;当 $a\neq -1$时,$f(a+1)=$________.

反思感悟 (1) 求函数的定义域应关注三点

(ⅰ) 要明确使各函数解析式有意义的条件是什么,函数有意义的准则一般有:①分式的分母不为 0;②偶次根式的被开方数非负;③ $y=x^0$ 要求 $x\neq 0$.

(ⅱ) 不对解析式化简变形,以免定义域变化.

(ⅲ) 当一个函数由两个或两个以上代数式的和、差、积、商的形式构成时,定义域是使得各式子都有意义的公共部分的集合.

(2) 函数求值的方法

①已知 $f(x)$ 的解析式时,只需用 a 替换解析式中的 x 即得 $f(a)$ 的值.

②求 $f(g(a))$ 的值应遵循由里往外的原则.

跟踪训练 2

求下列函数的定义域:

(1) $y=3-\dfrac{1}{2}x$;

(2) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{x+2}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{|x|-3}$;

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$.

三、判断是否为同一个函数

问题 1 构成函数的要素有哪些?

问题 2 结合函数的定义,如何才能确定一个函数?

例 3 下列各组函数：

①$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$，$g(x)=x-1$；

②$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$；

③$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$

④$f(x)=\sqrt{(x+3)^2}$，$g(x)=x+3$；

⑤汽车匀速运动时，路程与时间的函数关系$f(t)=80t(0\leqslant t\leqslant 5)$与一次函数$g(x)=80x(0\leqslant x\leqslant 5)$.

其中表示同一个函数的是________（填序号）.

反思感悟 判断两个函数为同一个函数应注意三点

(1)定义域、对应关系两者中只要有一个不相同就不是同一个函数，即使定义域与值域都相同，也不一定是同一个函数.

(2)函数是两个数集之间的对应关系，所以用什么字母表示自变量、因变量是没有限制的.

(3)在化简解析式时，必须是等价变形.

跟踪训练 3

下列各组函数中是同一个函数的是 （　　）

A. $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

B. $y=x^2+1$ 与 $s=t^2+1$

C. $y=2x$ 与 $y=2x(x\geqslant 0)$

D. $y=(x+1)^2$与 $y=x^2$

四、求抽象函数的定义域

例 4 (1)函数 $y=f(x)$的定义域是$[-1,3]$，则$f(2x+1)$的定义域为________.

(2)若函数 $y=f(3x+1)$的定义域为$[-2,4]$，则$y=f(x)$的定义域是 （　　）

A. $[-1,1]$　　B. $[-5,13]$

C. $[-5,1]$　　D. $[-1,13]$

反思感悟 抽象函数的定义域

(1)已知 $f(x)$的定义域为 $[a,b]$，求 $f(g(x))$的定义域时，不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的解集即所求定义域.

(2)已知 $f(g(x))$的定义域为 $[c,d]$，求 $f(x)$的定义域时，求出 $g(x)$在 $[c,d]$上的值域即所求定义域.

跟踪训练 4

已知函数$f(x-1)$的定义域为$\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，则函数$f(2x+1)$的定义域为 （　　）

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 9\}$　　B. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 7\}$

C. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,-2\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)区间的表示；

(2)求简单函数的定义域和求值；

(3)判断是否为同一个函数；

(4)求抽象函数的定义域.

2. 方法归纳：整体代换.

3. 常见误区：整体代换的思想求抽象函数的定义域.

随堂演练

1. 已知区间$[2a-1,11]$，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,6)$　　B. $(6,+\infty)$

C. $(1,6)$　　D. $(-1,6)$

2. 已知函数$f(x)=\dfrac{3}{x}$，则$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$等于 （　　）

A. $\dfrac{1}{a}$　　B. $\dfrac{3}{a}$

C. a　　D. $3a$

3. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$的定义域是________.

提醒：完成作业　第三章　3.1　3.1.1

3.1.2　函数的表示法

第 1 课时　函数的表示法(一)

【学习目标】1. 了解函数的三种表示方法及各自的优缺点.　2. 能用图象法表示函数,并能通过函数图象得到函数的值域.

一、函数的表示法

问题　结合初中所学以及上节课的几个问题,你能总结出函数的几种表示方法?

例 1　中秋节到了,小明想买几个月饼,已知月饼的单价是 6 元,买 $x(x\in\{1,2,3,4,5,6\})$ 个月饼需要 y 元,你能用函数的三种表示方法表示函数 $y=f(x)$ 吗?

反思感悟　理解函数表示法的三个关注点

(1)列表法、图象法、解析法均是函数的表示法,无论是哪种方式表示函数,都必须满足函数的概念.

(2)列表法更直观形象,图象法从形的角度描述函数,解析法从数的角度描述函数.

(3)函数的三种表示法互相兼容或补充,许多函数是可以用三种方法表示的,但在实际操作中,仍以解析法为主.

跟踪训练 1

已知函数 $f(x)=-x-1,x\in\{1,2,3,4\}$,试分别用图象法和列表法表示函数 $y=f(x)$.

二、函数的图象

例 2　作出下列函数的图象:

(1) $y=2x+1,x\in[0,2]$;

(2) $y=\dfrac{2}{x},x\in[2,+\infty)$;

(3) $y=x^2+2x,x\in[-2,2]$.

反思感悟　作函数 $y=f(x)$ 图象的方法

(1)若 $y=f(x)$ 是已学过的函数,则描出图象上的几个关键点,直接画出图象即可,有些可能需要根据定义域进行取舍.

(2)若 $y=f(x)$ 不是所学过的函数之一,则要按①列表;②描点;③连线这三个基本步骤作出 $y=f(x)$ 的图象.

跟踪训练 2

作出下列函数的图象:

(1) $y=1-x(x\in\mathbf{Z})$;

(2) $y=x^2-4x+3,x\in[1,3]$.

三、求简单函数的值域

例 3 求下列函数的值域:

(1) $y=2x+1, x\in\{1,2,3,4,5\}$;

(2) $y=\sqrt{x}+1$;

(3) $y=x^2-4x+6, x\in[1,5]$;

(4) $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$.

跟踪训练 3

求下列函数的值域:

(1) $y=-x^2-2x+3(-5\leqslant x\leqslant -2)$;

(2) $y=x+\sqrt{2x-1}$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1) 函数的表示法.

(2) 函数的图象及其应用.

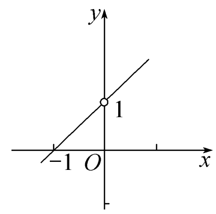
(3) 求函数的值域.

2. 方法归纳:观察法、配方法、换元法、分离常数法、数形结合法.

3. 常见误区:求函数值域时忽略函数的定义域.

随堂演练

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的定义域是 ( )



A. **R**

B. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

D. $(-1,0)$

2. 函数 $y=x^2-2x$ 的定义域为 $\{0,1,2,3\}$,那么其值域为 ( )

A. $\{-1,0,3\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$

C. $\{y|-1\leqslant y\leqslant 3\}$　　D. $\{y|0\leqslant y\leqslant 3\}$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是 ( )

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$

C. $(0,1]$　　D. $(0,1)$

4. 已知函数 $f(x)$ 由下表给出,则 $f(3)=$ ________.

x	$1\leqslant x<2$	2	$2<x\leqslant 4$
$f(x)$	1	2	3

提醒:完成作业　第三章　3.1　3.1.2　第 1 课时

第 2 课时　函数的表示法(二)

【学习目标】 1. 掌握利用图象的变换法作图.　2. 会求函数的解析式.

一、函数图象的画法

问题　除了我们所熟悉的"列表、描点、连线"作图,还有哪些作图的方法?

【知识梳理】

1. 函数图象的平移变换

(1) 左加右减:函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左 $(a>0)$ 或向右 $(a<0)$ 平移 $|a|$ 个单位长度得到函数 $y=f(x+a)$ 的图象.

(2) 上加下减:函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上 $(b>0)$ 或向下 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到函数 $y=f(x)+b$ 的图象.

2. 函数图象的对称变换

(1) $y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}} y=-f(x)$;

(2) $y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}} y=f(-x)$;

(3) $y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x)$.

3. 函数图象的翻折变换

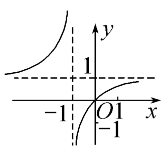
(1) $y=f(x)\xrightarrow[\text{把}x\text{轴下方的图象翻折到}x\text{轴上方}]{\text{保留}x\text{轴上方的图象}}y=|f(x)|$;

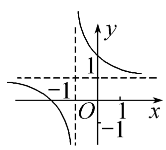
(2) $y=f(x)\xrightarrow[\text{把}y\text{轴左边的图象翻折到}y\text{轴右边}]{\text{保留}y\text{轴右边的图象}}y=f(|x|)$.

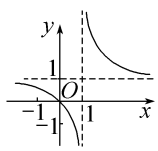
例 1 画出函数 $y=(x-2)^2$的图象.

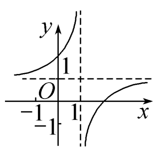
跟踪训练 1

函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$的大致图象是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

二、求函数的解析式

例 2 (1)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$的解析式;

(2)已知 $f(x)$为二次函数,且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$,求 $f(x)$的解析式;

(3)已知函数$f(x)$对于任意的 x 都有 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=x(x\neq0)$,求 $f(x)$的解析式.

跟踪训练 2

(1)已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求$f(x)$的解析式;

(2)已知函数$f(x)$是一次函数,若$f(f(x))=4x+8$,求 $f(x)$的解析式.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)函数的图象.

(2)求函数的解析式.

2. 方法归纳:待定系数法、换元法、配凑法、数形结合法.

3. 常见误区:求函数解析式时易忽视定义域.

随堂演练

1. 若二次函数的图象开口向上且关于直线 $x=1$ 对称,并过点 $(0,0)$,则此二次函数的解析式可能为 ( )

A. $f(x)=x^2-1$

B. $f(x)=-(x-1)^2+1$

C. $f(x)=(x-1)^2+1$

D. $f(x)=(x-1)^2-1$

2. 已知函数$f(2x-1)=4x+6$,则$f(x)$的解析式是 ( )

A. $f(x)=2x+8$　　B. $f(x)=2x+1$

C. $f(x)=2x+2$　　D. $f(x)=4x+2$

3. 已知 $f(x)$的图象恒过 $(1,-1)$,则函数$f(x-3)$的图象恒过点 ( )

A. $(-2,-1)$　　B. $(4,-1)$

C. $(1,-4)$　　D. $(1,-2)$

4. 已知二次函数$f(x)$的图象经过点$(-3,2)$,顶点是$(-2,3)$,则函数 $f(x)$ 的解析式为________.

提醒:完成作业 第三章 3.1 3.1.2 第 2 课时

第3课时　分段函数

【学习目标】1. 会用解析法及图象法表示分段函数.　2. 给出分段函数,能研究有关性质.　3. 能用分段函数解决生活中的一些简单问题.

一、分段函数求值(范围)问题

问题　函数 $y=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geq 0\end{cases}$ 是两个函数吗?

【知识梳理】

分段函数

(1)定义:像 $y=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geq 0\end{cases}$ 这样的函数称为分段函数;

(2)本质:函数在定义域不同的范围内,有着不同的对应关系.

例1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leq -2,\\3x+5,-2<x<2,\\2x-1,x\geq 2.\end{cases}$

(1)求 $f(-5)$,$f(1)$,$f\left(f\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right)$的值;

(2)若 $f(a^2+2)\geq a+4$,求实数 a 的取值范围.

反思感悟　(1)分段函数求值的方法

①先确定要求值的自变量属于哪一段区间.

②然后代入该段的解析式求值,直到求出值为止.当出现 $f(f(x_0))$ 的形式时,应从内到外依次求值.

(2)已知分段函数的函数值求对应的自变量的值,可分段利用函数解析式求得自变量的值,但应注意检验函数解析式的适用范围,也可先判断每一段上的函数值的范围,确定解析式再求解.

跟踪训练1

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1,x\leq 0,\\-(x-1)^2,x>0,\end{cases}$ 使 $f(x)\geq -1$ 成立的 x 的取值范围是　(　　)

A. $[-4,2)$　　B. $[-4,2]$

C. $(0,2]$　　D. $(-4,2]$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2,x\leq 2,\\\dfrac{4}{5}x,x>2.\end{cases}$ 若 $f(x_0)=8$,则 $x_0=$________.

二、分段函数的图象及应用

例2　已知函数 $f(x)=-x^2+2$,$g(x)=x$,令 $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$(即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中的较小者).

(1)分别用图象法和解析式表示 $\varphi(x)$;

(2)求函数 $\varphi(x)$ 的定义域、值域.

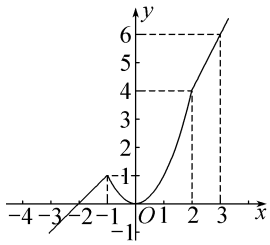
反思感悟　分段函数图象的画法

(1)对含有绝对值的函数,要作出其图象,首先应根据绝对值的意义去掉绝对值符号,将函数转化为分段函数,然后分段作出函数图象.

(2)作分段函数的图象时,分别作出各段的图象,在作每一段图象时,先不管定义域的限制,作出其图象,再保留定义域内的一段图象即可,作图时要特别注意接点处点的虚实,保证不重不漏.

跟踪训练 2

函数 $f(x)$ 的图象如图所示，在 $[-1,2]$ 上的图象为抛物线，两端为射线，求函数 $f(x)$ 的解析式.



三、分段函数在实际问题中的应用

例 3　国家规定个人稿费纳税办法：不超过 800 元的不纳税；超过 800 元而不超过 4 000 元的按超过 800 元部分的 14%纳税；超过 4000 元的按全部稿酬的 11.2%纳税. 已知某人出版一本书，共纳税 420 元，则这个人应得稿费（扣税前）为　　(　　)

A. 2 800 元　　B. 3 000 元

C. 3 800 元　　D. 3 750 元

反思感悟　分段函数的实际应用

(1) 当目标在不同区间有不同的计算表达方式时，往往需要用分段函数模型来表示两变量间的对应关系，而分段函数图象也需要分段画.

(2) 分段函数模型应用的关键是确定分段的各分界点，即明确自变量的取值区间，对每一个区间进行分类讨论，从而写出相应的函数解析式.

跟踪训练 3

某市"招手即停"公共汽车的票价按下列规则制定：

(1) 5 km 以内（含 5 km），票价 2 元；

(2) 5 km 以上，每增加 5 km，票价增加 1 元（不足 5 km 的按 5 km 计算）.

如果某条线路的总里程为 20 km，请根据题意，写出票价与里程之间的函数解析式，并画出函数的图象.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1) 分段函数的概念及求值.

(2) 分段函数的图象及应用.

2. 方法归纳：分类讨论、数形结合法.

3. 常见误区：

(1) 作分段函数图象时要注意衔接点的虚实.

(2) 求分段函数的函数值时要依据自变量的取值范围确定对应的解析式.

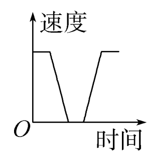
随堂演练

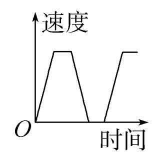
1. 著名的 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数},\\ 0, x \text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $D(D(x))$ 等于　　(　　)

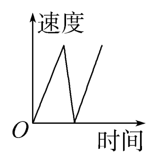
A. 0　　B. 1

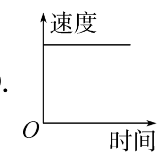
C. $\begin{cases}1, x \text{ 为无理数},\\ 0, x \text{ 为有理数}\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1, x \text{ 为有理数},\\ 0, x \text{ 为无理数}\end{cases}$

2. 一列货运火车从某站出发，匀加速行驶一段时间后开始匀速行驶，过了一段时间，火车到达下一站停车，装完货以后，火车又匀加速行驶，一段时间后再次匀速行驶，下列图象可以近似地刻画出这列火车的速度变化情况的是　　(　　)

A.


B.


C.


D.


3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-2, x<2,\\ f(x-1), x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(2)$ 等于　　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x\leqslant -1,\\ x^2, -1<x<2,\end{cases}$ 若 $f(x)=3$，则 x 的值是________.

提醒：完成作业　第三章　3.1　3.1.2　第 3 课时

3.2　函数的基本性质

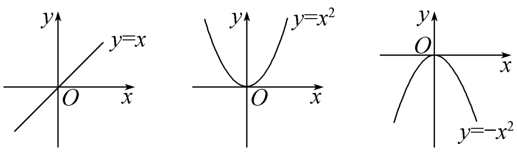
3.2.1　单调性与最大(小)值

第 1 课时　函数的单调性

【学习目标】1. 能借助函数图象理解函数在某区间上单调递增(或递减)和增函数、减函数的概念. 2. 理解函数在某区间上具有(严格的)单调性和单调区间的概念. 3. 能运用定义法证明函数的单调性.

一、直观感知函数的单调性

问题 1　观察下面三个函数图象,它们的图象有什么变化规律?这反映了相应函数值的哪些变化规律?



问题 2　如何理解函数图象是上升的?

【知识梳理】

函数的单调性

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,区间 $D\subseteq I$:

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$,当 x_1 ________ x_2 时,都有 $f(x_1)$ ________ $f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增.

特别地,当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时,我们就称它是增函数.

如果 $\forall x_1, x_2 \in D$,当 x_1 ________ x_2 时,都有 $f(x_1)$ ________ $f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减.

特别地,当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时,我们就称它是减函数.

例 1　已知函数 $f(x)=x^2-4|x|+3, x\in \mathbf{R}$. 根据图象写出它的单调区间.

反思感悟　(1)求函数单调区间时,若所给函数是常见的一次函数、二次函数、反比例函数等,可根据其单调性写出函数的单调区间,若函数不是上述函数且函数图象容易作出,可作出其图象,根据图象写出其单调区间.

(2)一个函数出现两个或两个以上的单调区间时,不能用“∪”连接两个单调区间,而要用“和”或“,”连接.

跟踪训练 1

画出函数 $y=|x|(x-2)$ 的图象,并指出函数的单调区间.

二、利用定义证明函数的单调性

例 2 求证：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

反思感悟 利用定义证明函数单调性的步骤

(1)取值并规定大小：设 x_1,x_2 是该区间内的任意两个值，且 $x_1<x_2$；

(2)作差变形：作差 $f(x_1)-f(x_2)$，并通过因式分解、通分、配方、有理化等手段，转化为易判断正负的关系式；

(3)定号：确定 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号，当符号不确定时，进行分类讨论；

(4)结论：根据定义确定单调性.

跟踪训练 2

求证：函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}-1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

三、函数单调性的简单应用

例 3 (1)若函数 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是________.

(2)已知函数 $y=f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，且 $f(2x-3)>f(5x-6)$，则实数 x 的取值范围是________.

反思感悟 由函数单调性求参数范围的处理方法

(1)由函数解析式求参数

若为二次函数——判断开口方向与对称轴——利用单调性确定参数满足的条件.

若为一次函数——由一次项系数的正负决定单调性.

若为复合函数 $y=|f(x)|$ 或 $y=f(|x|)$——数形结合，探求参数满足的条件.

(2)当函数 $f(x)$ 的解析式未知时，欲求解不等式，可以依据函数单调性的定义和性质，将符号“f”去掉，列出关于自变量的不等式(组)，然后求解，此时注意函数的定义域.

跟踪训练 3

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x>1,\\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x-1,x\leqslant 1.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 a 的取值范围为________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)增函数、减函数的定义.

(2)函数的单调区间.

2. 方法归纳：数形结合法.

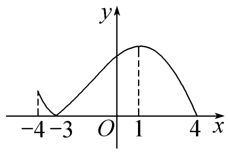
3. 常见误区：

(1)函数的单调区间不能用并集.

(2)利用函数的单调性求参数的取值范围忽略函数的定义域.

随堂演练

1. 函数 $y=f(x)$, $x\in[-4,4]$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ( )



A. $[-4,4]$　　B. $[-4,-3]\cup[1,4]$

C. $[-3,1]$　　D. $[-3,4]$

2. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,则有 ( )

A. $f(3)<f(5)$　　B. $f(3)\leqslant f(5)$

C. $f(3)>f(5)$　　D. $f(3)\geqslant f(5)$

3. 若 $y=(2k-1)x+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,则有 ( )

A. $k>\frac{1}{2}$　B. $k>-\frac{1}{2}$　C. $k<\frac{1}{2}$　D. $k<-\frac{1}{2}$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,且 $f(x^2-2)<f(-x)$,则 x 的取值范围是________.

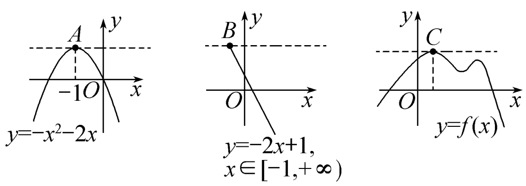
提醒:完成作业　第三章　3.2　3.2.1　第 1 课时

第 2 课时　函数的最大(小)值

【学习目标】 1. 了解函数的最大(小)值的概念及其几何意义.　2. 能够借助函数图象的直观性得出函数的最值.　3. 会借助函数的单调性求最值.　4. 能够利用函数的单调性解决日常生活中的问题.

一、直观感知函数的最大值和最小值

问题 1　如图所示是函数 $y=-x^2-2x$, $y=-2x+1$, $x\in[-1,+\infty)$, $y=f(x)$ 的图象. 观察并描述这三个图象的共同特征.



问题 2　你是怎样理解函数图象最高点的?

【知识梳理】

函数的最值

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:

(1) $\forall x\in I$,都有 $f(x)$________M;

(2) $\exists x_0\in I$,使得________,那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:

(3) $\forall x\in I$,都有 $f(x)$________M;

(4) $\exists x_0\in I$,使得________,那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

例 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, x>1.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

跟踪训练 1

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{2}{x}, x>2.\end{cases}$ 求函数$f(x)$的最大值、最小值.

二、利用函数的单调性求函数的最值

问题 3 若函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增,则$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值分别是多少?

问题 4 若 $f(x)=-x^2$的定义域为 $[-1,2]$,则$f(x)$的最大值和最小值一定在端点上取到吗?

例 2 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$.

(1)证明:函数 $f(x)$在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减;

(2)求函数 $f(x)$在 $[1,5]$上的最值.

跟踪训练 2

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

(1)求证:$f(x)$在 $[1,+\infty)$上单调递增;

(2)求 $f(x)$在 $[1,4]$上的最大值与最小值.

三、探究生活中的实际问题

例 3 某公司生产一种电子仪器的固定成本为 20 000 元,每生产一台仪器需增加投入 100 元,已知总收益满足函数:$R(x)=\begin{cases}400x-\dfrac{1}{2}x^2,0\leqslant x\leqslant 400,\\80\ 000,x>400,\end{cases}$ 其中 x 是仪器的月产量.

(1)将利润表示为月产量的函数 $f(x)$.

(2)当月产量为何值时,公司所获利润最大?最大利润为多少元?(总收益=总成本+利润)

反思感悟 本题主要考查二次函数的最值问题,以及应用二次函数解决实际问题的能力. 解应用题的步骤是①审清题意;②建立数学模型,将实际问题转化为数学问题;③总结结论,回归题意.

跟踪训练 3

将进货单价为 40 元的商品按 50 元一个出售时,能卖出 500 个,已知这种商品每涨价 1 元,其销售量就减少 10 个,为得到最大利润,售价应为多少元?最大利润为多少?

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)函数的最大值、最小值定义.

(2)求解函数最值的方法.

2. 方法归纳:配方法、分类讨论法、数形结合法.

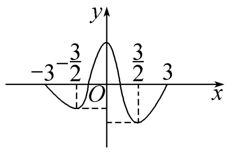
3. 常见误区:

(1)在利用单调性求最值时,勿忘求函数的定义域.

(2)求含参数的二次函数的最值时不要忘记按对称轴与区间的位置分类讨论.

随堂演练

1. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示,则其最大值、最小值分别为 ( )



A. $f\left(\frac{3}{2}\right),f\left(-\frac{3}{2}\right)$　　B. $f(0),f\left(\frac{3}{2}\right)$

C. $f\left(-\frac{3}{2}\right),f(0)$　　D. $f(0),f(3)$

2. 设函数 $f(x)=2x-1(x<0)$，则 $f(x)$　　(　　)

A. 有最大值

B. 有最小值

C. 既有最大值又有最小值

D. 既无最大值又无最小值

3. 函数 $y=x^2-2x,x\in[0,3]$ 的值域为　　(　　)

A. $[0,3]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[-1,3]$

4. 用长度为 24 m 的材料围一矩形场地，中间加两道隔墙，要使矩形的面积最大，则隔墙的长度为________m.

提醒：完成作业　第三章　3.2　3.2.1　第 2 课时

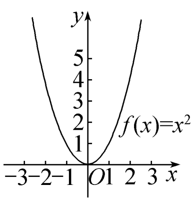
3.2.2　奇偶性

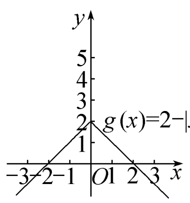
第 1 课时　奇偶性的概念

【学习目标】1. 了解函数奇偶性的定义.　2. 掌握判断和证明函数奇偶性的方法.　3. 应用函数的奇偶性解决简单的求值问题.

一、函数奇偶性的概念

问题 1　观察下列函数图象，你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗？

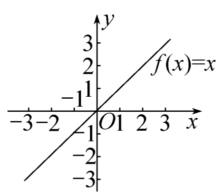


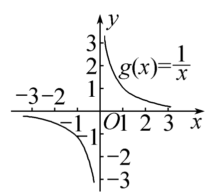


问题 2　如何利用符号语言精确地描述“函数图象关于 y 轴对称”呢？不妨取自变量的一些特殊值，观察下表相应函数值的情况.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$g(x)=2-\lvert x\rvert$	…	-1	0	1	2	1	0	-1	…

问题 3　观察函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}$ 的图象，你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗？你能用符号语言精确地描述这一特征吗？并自主探究结果.





【知识梳理】

偶函数的定义：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$，且________，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

奇函数的定义：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$，且________，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数.

二、函数奇偶性的判断

例 1 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=-|x|$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$;

(3) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

(4) $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

跟踪训练 1

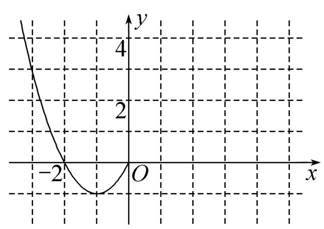
判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$;

(2) $f(x)=x^2(x^2+2)$.

三、奇、偶函数的图象及应用

例 2 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数,且当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2+2x$. 现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象,如图所示.



(1)请补全函数 $y=f(x)$ 的图象;

(2)根据图象写出函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间;

(3)根据图象写出使 $f(x)<0$ 的 x 的取值集合.

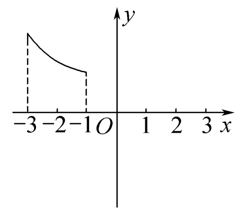
反思感悟 巧用奇、偶函数的图象求解问题

(1)依据:奇函数⇔图象关于原点对称,偶函数⇔图象关于 y 轴对称.

(2)求解:根据奇、偶函数图象的对称性可以解决诸如求值、比较大小及解不等式问题.

跟踪训练 2

定义在 $[-3,-1]\cup[1,3]$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数,其部分图象如图所示.



(1)请在平面直角坐标系中补全函数 $f(x)$ 的图象;

(2)比较 $f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小.

四、利用函数的奇偶性求值

例 3 (1)若函数 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数,定义域为 $[a-1,2a]$,则 $a=$________,$b=$________.

(2)已知函数 $f(x)=x^7-ax^5+bx^3+cx+2$,若 $f(-3)=-3$,则 $f(3)=$________.

反思感悟 利用函数奇偶性求值的常见类型

(1)求参数值:若解析式含参数,则根据 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 列式,比较系数利用待定系数法求解;若定义域含参数,则根据定义域关于原点对称,利用区间的端点和为 0 求参数.

(2)求函数值:利用 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 求解,有时需要构造奇函数或偶函数以便于求值.

跟踪训练 3

(1)已知函数 $f(x)=x^2+(2-m)x+m^2+12$ 为偶函数,则 m 的值是 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

(2)设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数,则 $a=$________.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)函数奇偶性的概念.

(2)奇函数、偶函数的图象特征.

2. 方法归纳:特殊值法、数形结合法.

3. 常见误区:忽略奇、偶函数的定义域关于原点对称.

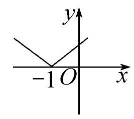
随堂演练

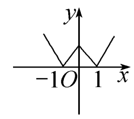
1. 已知函数 $y=f(x)$,$x\in[-1,a]$ $(a>-1)$是奇函数,则 a 等于 ( )

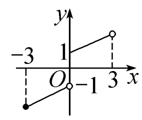
A. -1　　B. 0

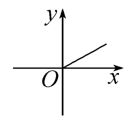
C. 1　　D. 无法确定

2. 下列图象表示的函数中具有奇偶性的是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

3. (多选)下列函数是奇函数的是 ( )

A. $y=x(x\in[0,1])$　　B. $y=3x^2$

C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x|x|$

4. 已知函数 $y=f(x)$为偶函数,其图象与 x 轴有四个交点,则方程 $f(x)=0$ 的所有实根之和是________.

提醒:完成作业　第三章　3.2　3.2.2　第 1 课时

第 2 课时　奇偶性的应用

【学习目标】1. 掌握用奇偶性求解析式的方法. 2. 理解奇偶性对单调性的影响并能用以比较大小、求最值和解不等式.

一、根据函数奇偶性求函数的解析式

【知识梳理】

用奇偶性求解析式的步骤:

如果已知函数的奇偶性和一个区间$[a,b]$上的解析式,求关于原点的对称区间$[-b,-a]$上的解析式,其解决思路为

(1)“求谁设谁”,即在哪个区间上求解析式,x 就应在哪个区间上设.

(2)要利用已知区间的解析式进行代入.

(3)利用$f(x)$的奇偶性写出$-f(x)$或$f(-x)$,从而解出$f(x)$.

例 1　(1)若$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x+3$,求 $f(x)$的解析式.

(2)设$f(x)$是偶函数,$g(x)$是奇函数,且$f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$,求函数$f(x)$,$g(x)$的解析式.

跟踪训练 1

(1)已知 $f(x)$是 **R** 上的偶函数,当 $x\in(0,+\infty)$时,$f(x)=x^2+x-1$,当 $x\in(-\infty,0)$时,求 $f(x)$的解析式.

(2)设函数$f(x)$是定义在**R**上的奇函数,当$x<0$时,$f(x)=-x^2-x$,求函数$f(x)$的解析式.

二、利用函数奇偶性与单调性比较大小

问题 想一想奇函数与偶函数的图象特点,如果奇函数在$(-2,-1)$上单调递减,那么它在$(1,2)$上的单调性如何?如果偶函数在$(-2,-1)$上单调递减,那么它在$(1,2)$上的单调性如何?

【知识梳理】

1. 若$f(x)$为奇函数且在区间$[a,b]$$(a<b)$上单调递增,则$f(x)$在$[-b,-a]$上________,即在对称区间上单调性________.
2. 若$f(x)$为偶函数且在区间$[a,b]$$(a<b)$上单调递增,则$f(x)$在$[-b,-a]$上________,即在对称区间上单调性________.
3. 若$f(x)$为奇函数且在区间$[a,b]$$(a<b)$上有最大值为$M$,则$f(x)$在$[-b,-a]$上有最小值为________.
4. 若$f(x)$为偶函数且在区间$[a,b]$$(a<b)$上有最大值为$N$,则$f(x)$在$[-b,-a]$上有最大值为________.

以上a,b符号相同.

例2 已知$f(x)$是奇函数,且在区间$[0,+\infty)$上单调递增,则$f(-0.5)$,$f(-1)$,$f(0)$的大小关系是 ( )

A. $f(-0.5)<f(0)<f(-1)$

B. $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$

C. $f(0)<f(-0.5)<f(-1)$

D. $f(-1)<f(0)<f(-0.5)$

反思感悟 比较大小的求解策略

(1)若自变量在同一个单调区间上,直接利用函数的单调性比较大小.

(2)若自变量不在同一个单调区间上,需利用函数的奇偶性把自变量转化到同一个单调区间上,然后利用单调性比较大小.

跟踪训练2

设函数$f(x)$的定义域为**R**,对于任意实数x总有$f(-x)=f(x)$,当$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)$单调递增,则$f(-2)$,$f(\pi)$,$f(-3)$的大小关系是 ( )

A. $f(\pi)>f(-3)>f(-2)$

B. $f(\pi)>f(-2)>f(-3)$

C. $f(\pi)<f(-3)<f(-2)$

D. $f(\pi)<f(-2)<f(-3)$

三、利用函数的单调性与奇偶性解不等式

例3 设定义在$[-2,2]$上的奇函数$f(x)$在区间$[0,2]$上单调递减,若$f(1-m)<f(m)$,求实数m的取值范围.

反思感悟 利用函数奇偶性与单调性解不等式,一般有两类

(1)利用图象解不等式.

(2)转化为简单不等式求解.

①利用已知条件,结合函数的奇偶性,把已知不等式转化为$f(x_1)<f(x_2)$或$f(x_1)>f(x_2)$的形式;

②根据奇函数在对称区间上的单调性一致，偶函数在对称区间上的单调性相反，去掉不等式中的“f”转化为简单不等式(组)求解.

特别提醒：列不等式(组)时不要忘掉函数的定义域.

跟踪训练 3

已知$f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在区间$(-\infty,0)$上单调递增. 若$f(-3)=0$，则$\dfrac{f(x)}{x}<0$的解集为________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)利用奇偶性求函数的解析式.

(2)利用奇偶性和单调性比较大小、解不等式.

2. 方法归纳：转化法、数形结合法.

3. 常见误区：解不等式易忽视函数的定义域.

随堂演练

1. 已知偶函数在$(-\infty,0)$上单调递增，则　　(　　)

A. $f(1)>f(2)$　　B. $f(1)<f(2)$

C. $f(1)=f(2)$　　D. 以上都有可能

2. 设偶函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1]$上单调递增，则　　(　　)

A. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(-1)<f(2)$

B. $f(2)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(-1)$

C. $f(2)<f(-1)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

D. $f(-1)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)<f(2)$

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\leqslant 0,\\ ax^2+bx, x>0\end{cases}$为奇函数，则$a+b$等于　　(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 2

4. 已知定义在 **R** 上的偶函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增，若$f(a)>f(3)$，则实数a的取值范围是________.

提醒：完成作业　第三章　3.2　3.2.2　第2课时

习题课　函数性质的综合问题

【学习目标】1. 理解和掌握对称轴和对称中心满足的条件.　2. 掌握函数性质的综合应用问题.

一、函数图象的对称性

问题 1　当函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称时，会满足怎样的条件呢？

问题 2　当函数$y=f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称时，又会满足怎样的条件呢？

【知识梳理】

1. 函数图象关于直线对称

$y=f(x)$在定义域内恒满足的条件	$y=f(x)$的图象的对称轴
$f(a+x)=f(a-x)$	直线 $x=a$
$f(x)=f(a-x)$	直线 $x=\frac{a}{2}$
$f(a+x)=f(b-x)$	直线 $x=\frac{a+b}{2}$

2. 函数图象关于点对称

$y=f(x)$在定义域内恒满足的条件	$y=f(x)$的图象的对称中心
$f(a-x)=-f(a+x)$	$(a,0)$
$f(x)=-f(a-x)$	$\left(\frac{a}{2},0\right)$
$f(a+x)=-f(b-x)$	$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$
$f(a+x)+f(b-x)=c$	$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

例 1 定义在 **R** 上的偶函数 $y=f(x)$，其图象关于点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$对称，且 $x\in[0,1]$时，$f(x)=-x+\frac{1}{2}$，则$f\left(\frac{3}{2}\right)$等于 ( )

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

反思感悟 解决对称性、单调性和奇偶性综合问题的方法：

①图象法，根据题意，作出符合要求的草图，便可得出结论.

②性质法，根据对称性、单调性和奇偶性的性质，逐步推导解决求值和比较大小的问题.

注意：使用性质要规范，切不可自创性质！

跟踪训练 1

若函数 $y=f(x)$在$(0,2)$上单调递增，函数 $y=f(x+2)$是偶函数，则下列结论正确的是 ( )

A. $f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

B. $f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

C. $f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)$

D. $f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

二、函数性质的综合应用

例 2 已知函数$f(x)=\frac{ax+b}{1+x^2}$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$.

(1)确定函数$f(x)$的解析式.

(2)用定义证明$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

(3)解不等式：$f(t-1)+f(t)<0$.

跟踪训练 2

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，函数 $g(x)=f(x-1)+f(3-2x)$.

(1)求函数 $g(x)$ 的定义域.

(2)若 $f(x)$ 为奇函数，并且在定义域上是减函数，求不等式 $g(x)\leqslant 0$ 的解集.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)函数图象的对称轴和对称中心.

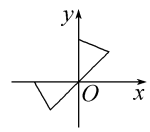
(2)函数奇偶性的综合应用.

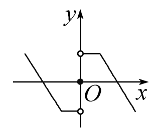
2. 方法归纳：数形结合法、等价转化法.

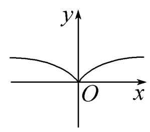
3. 常见误区：容易忽视奇函数中的隐含条件 $f(0)=0$.

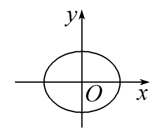
随堂演练

1. 下列各图中，表示以 x 为自变量的奇函数的图象是　　(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，若 $x_1<0$ 且 $x_1+x_2>0$，则　　(　　)

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$

B. $f(-x_1)=f(-x_2)$

C. $f(-x_1)<f(-x_2)$

D. $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小关系不确定

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，则不等式 $f(2x+1)+f(1)\geqslant 0$ 的解集是　　(　　)

A. $(-\infty,1)$

B. $(-1,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$

D. $(-\infty,1]$

4. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是________.

3.3　幂函数

【学习目标】 1. 掌握幂函数的概念、图象特征和性质.　2. 掌握幂函数的图象位置和形状变化，会根据幂函数的单调性比较幂值的大小.

一、幂函数的概念

问题 1　下面几个实例，观察它们得出的函数解析式，有什么共同特征？

(1)如果张红以 1 元/千克的价格购买了某种蔬菜 w 千克，那么她需要支付 $p=\omega$ 元，这里 p 是 ω 的函数；

(2)如果正方形的边长为 a,那么正方形的面积 $S=a^2$,这里 S 是 a 的函数;

(3)如果立方体的棱长为 b,那么立方体的体积 $V=b^3$,这里 V 是 b 的函数;

(4)如果一个正方形场地的面积为 S,那么这个正方形的边长 $c=\sqrt{S}$,这里 c 是 S 的函数;

(5)如果某人 t s 内骑车行进了 1 km,那么他骑车的平均速度 $v=\frac{1}{t}$km/s,即 $v=t^{-1}$,这里 v 是 t 的函数.

【知识梳理】

幂函数的概念

一般地,函数________叫做幂函数,其中 x 是________,α 是________.

例 1 (1)在函数 $y=\frac{1}{x^2}$,$y=2x^2$,$y=x^2+x$,$y=1$ 中,幂函数的个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(2)已知 $y=(m^2+2m-2)x^{m^2-2}+2n-3$ 是幂函数,求 m,n 的值.

反思感悟 幂函数的判断及应用

(1)判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^\alpha$(α 为常数)的形式,需满足:①指数为常数,②底数为自变量,③x^α的系数为 1. 形如 $y=(3x)^\alpha$,$y=2x^\alpha$,$y=x^\alpha+5$……形式的函数都不是幂函数.

(2)若一个函数为幂函数,则该函数也必具有 $y=x^\alpha$(α 为常数)这一形式.

跟踪训练 1

若函数 $f(x)$ 是幂函数,且满足 $f(4)=16$,则 $f(-4)=$________.

二、幂函数的图象与性质

问题 2 根据之前所学,我们应该从哪些方面来研究幂函数?

问题 3 你能在同一坐标系下作出 $y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=x^{\frac{1}{2}}$,$y=x^{-1}$这五个函数的图象吗?

问题 4 观察函数图象以及函数解析式,完成下表.

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					

【知识梳理】

通过以上信息，我们可以得到：

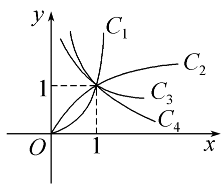
(1)函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$和 $y=x^{-1}$的图象都通过点________；

(2)函数 $y=x$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$是________，函数 $y=x^2$是________；

(3)在区间$(0,+\infty)$上，函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$________，函数 $y=x^{-1}$________；

(4)在第一象限内，函数 $y=x^{-1}$的图象向上与 y 轴________，向右与 x 轴________.

例 2 如图所示，图中的曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象，已知 n 取 $\pm2,\pm\frac{1}{2}$四个值，则相应于 C_1,C_2,C_3,C_4的 n 值依次为 ( )



A. $-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$

B. $2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2$

C. $-\frac{1}{2},-2,2,\frac{1}{2}$

D. $2,\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}$

反思感悟 (1)解决与幂函数有关的综合性问题的方法

首先要考虑幂函数的概念，对于幂函数 $y=x^\alpha$(α是常数)，由于 α 的取值不同，所以相应幂函数的单调性和奇偶性也不同. 同时，注意分类讨论思想的应用.

(2)幂函数图象的画法

①确定幂函数在第一象限内的图象：先根据 α 的取值，确定幂函数 $y=x^\alpha$ 在第一象限内的图象.

②确定幂函数在其他象限内的图象：根据幂函数的定义域及奇偶性确定幂函数 $f(x)$ 在其他象限内的图象.

跟踪训练 2

若点 $(\sqrt{2},2)$在幂函数 $f(x)$ 的图象上，点 $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$在幂函数 $g(x)$ 的图象上，问当 x 为何值时

(1)$f(x)>g(x)$；(2)$f(x)=g(x)$；(3)$f(x)<g(x)$.

三、幂函数性质的综合运用

例 3 (1)比较下列各组数中两个数的大小：

① $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.5}$与$\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}$；

② $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$与$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1}$；

③ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$与$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

(2)已知幂函数 $y=x^{p-3}(p\in\mathbf{N}^*)$ 的图象关于 y 轴对称，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，求满足 $(a+1)^{\frac{p}{3}}<(3-2a)^{\frac{p}{3}}$ 的 a 的取值范围.

反思感悟 比较幂值大小和解决幂函数的综合问题的注意点

(1)若两个幂值的指数相同或可化为两个指数相同的幂值时，则可构造函数，利用幂函数的单调性比较大小.

(2)若底数、指数均不同，则考虑用中间值法比较大小，这里的中间值可以是“0”或“1”.

(3)充分利用幂函数的图象、性质，如图象所过定点、单调性、奇偶性等.

(4)注意运用常见的思想方法，如分类讨论、数形结合等数学思想.

跟踪训练 3

(1)比较下列各组数的大小：

① $\left(\frac{2}{3}\right)^{0.3}$ 与 $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}$；

② -3.14^3 与 $-\pi^3$.

(2)已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{m^2+m}}(m\in\mathbf{N}^*)$. 若该函数图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，试确定 m 的值，并求满足条件 $f(2-a)>f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)幂函数的定义.

(2)几个常见幂函数的图象.

(3)幂函数的性质.

2. 方法归纳：待定系数法、数形结合法、分类讨论法.

3. 常见误区：易忽略题目中给出的条件以及幂函数的图象和性质.

随堂演练

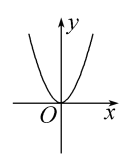
1. 下列函数中不是幂函数的是 ( )

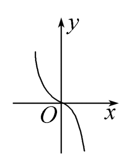
A. $y=\sqrt{x}$ B. $y=x^3$ C. $y=3x$ D. $y=x^{-1}$

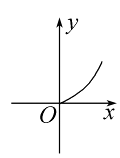
2. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(4,\frac{1}{4}\right)$，则 $f(2)$ 等于 ( )

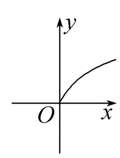
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

3. 函数 $y=x^{\frac{5}{4}}$ 的图象是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

4. $0.23^{-2.3}$ 与 $0.24^{-2.3}$ 的大小关系是________.

提醒：完成作业 第三章 3.3

习题课　反比例函数、对勾函数

【学习目标】1. 掌握反比例函数、对勾函数的图象和性质.　2. 能通过构造函数解决实际问题.

一、反比例函数的图象和性质

问题1　反比例函数的一般形式是什么?

问题2　反比例函数的图象会过坐标原点吗?

例1　画出反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象.

(1)求函数的定义域和值域;

(2)判断函数的单调性和奇偶性.

反思感悟　研究反比例函数的几个方面

(1)函数的定义域和值域可以由图象直接得到.

(2)由图象或者单调性的定义可以判断函数的单调性,但一定要注意两个单调递增(减)区间的连接方法.

(3)由图象或者奇偶性的定义可以判断函数的奇偶性.

(4)函数图象关于原点(0,0)中心对称.

跟踪训练1

作出函数 $y=\frac{2}{x}(-2\leqslant x<1$ 且 $x\neq 0)$ 的图象,并指出其值域和单调区间.

二、对勾函数的图象和性质

问题3　观察函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 解析式的特点,你想到了什么?

问题4　大家讨论一下,如何作出该函数的图象?

问题5　观察函数图象,你能发现函数图象有什么特点吗?

问题 6 结合函数的解析式和函数图象，你能得出 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的哪些性质？

例 2 探究函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的性质，并画出它的简图（单调性需证明，其余性质列出即可）.

跟踪训练 2

函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

(1) $x\in[1,3]$，$f(x)$ 的最小值是________；

(2) $x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$，$f(x)$ 的值域为________；

(3) $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,3]$，$f(x)$ 的值域为________.

三、对勾函数的综合运用

问题 7 应用基本不等式求最值应注意哪些？

例 3 已知函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+a}{x}$.

(1) 当 $a=4$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上的最小值；

(2) 当 $a>0$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值.

反思感悟 求对勾函数的最值问题，可以利用函数的单调性研究，也可以利用基本不等式.

跟踪训练 3

求下列函数在 $x\in(1,2]$ 上的值域：

(1) $y=\frac{x}{x^2+1}$；(2) $y=\frac{x^2+3x+2}{x}$；(3) $y=x+\frac{5}{x-1}$.

【课堂小结】

1. 知识清单：

 (1) 反比例函数的图象和性质.

 (2) 对勾函数的图象和性质.

2. 方法归纳：分类讨论、数形结合.

3. 常见误区：研究函数的性质一定先确定函数的定义域.

随堂演练

1. 函数 $y=\frac{m-3}{x}$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，那么 m 的取值范围是 ( )

A. $m<3$

B. $m>3$

C. $m<-3$

D. $m>-3$

2. (多选)已知函数 $y=\frac{3}{x}$,下列结论中正确的是 (　　)

A. 其图象经过点(3,1)

B. 其图象分别位于第一、三象限

C. 当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小

D. 当 $x>1$ 时,$y>3$

3. 已知点 $P(a,m)$,$Q(b,n)$都在函数 $y=-\frac{2\,021}{x}$ 的图象上,且 $a<0<b$,则下列结论一定正确的是 (　　)

A. $m+n<0$

B. $m+n>0$

C. $m>n$

D. $m<n$

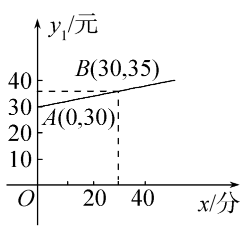
4. 已知对勾函数 $y=x+\frac{a^2}{x}(a>0)$ 在 $(-\infty,-a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-a,0)$ 和 $(0,a)$ 上单调递减. 若对勾函数 $f(x)=x+\frac{t}{x}(t>0)$ 在整数集合 **Z** 内单调递增,则实数 t 的取值范围为________.

3.4　函数的应用(一)

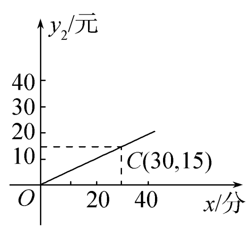
【学习目标】1. 初步体会一次函数、二次函数、幂函数、分段函数模型的广泛应用,能运用函数思想处理现实生活中的简单应用问题.　2. 能将实际问题转化为熟悉的模型,建立合适的数学模型解决简单的实际问题.

一、一次函数模型的应用

例 1　为了发展电信事业,方便用户,电信公司对移动电话采用不同的收费方式,其中所使用的"如意卡"与"便民卡"在某市范围内每月(30 天)的通话时间 x(分)与通话费用 y(元)的关系如图所示.



如意卡



便民卡

(1)分别求出通话费用 y_1,y_2 与通话时间 x 之间的函数解析式;

(2)请帮助用户计算在一个月内使用哪种卡便宜.

反思感悟　一次函数模型的特点和求解方法

(1)一次函数模型的突出特点是其图象是一条直线.

(2)解一次函数模型时,注意待定系数法的应用,主要步骤是:设元、列式、求解.

跟踪训练 1

某报刊亭从报社买进报纸的价格是每份 0.24 元,卖出的价格是每份 0.40 元,卖不掉的报纸可以以每份 0.08 元的价格退回报社. 在一个月(以 30 天计算)里,有 20 天每天可卖出 400 份,其余 10 天每天只能卖出 250 份,但每天从报社买进的报纸份数必须相同,试问报刊亭摊主应该每天从报社买进多少份报纸,才能使每月所获利润最大.

二、二次函数模型的应用

例 2 某水果批发商销售每箱进价为 40 元的苹果,假设每箱售价不得低于 50 元且不得高于 55 元.市场调查发现,若每箱以 50 元的价格销售,平均每天销售 90 箱,价格每提高 1 元,平均每天少销售 3 箱.

(1)求平均每天的销售量 y(箱)与销售单价 x(元/箱)之间的函数关系式;

(2)求该批发商平均每天的销售利润 w(元)与销售单价 x(元/箱)之间的函数关系式;

(3)当每箱苹果的售价为多少元时,可以获得最大利润? 最大利润是多少?

跟踪训练 2

据市场分析，烟台某海鲜加工公司当月产量在10吨至25吨时，月生产总成本 y(万元)可以看成月产量 x(吨)的二次函数；当月产量为10吨时，月总成本为20万元；当月产量为15吨时，月总成本最低为17.5万元，且为二次函数的顶点.

(1)写出月总成本 y(万元)关于月产量 x(吨)的函数关系式；

(2)已知该产品销售价为每吨1.6万元，那么月产量为多少时，可获最大利润？

三、分段函数模型的应用

例 3 中国“一带一路”倡议提出后，某科技企业为抓住“一带一路”带来的机遇，决定开发生产一款大型电子设备，生产这种设备的年固定成本为500万元，每生产 x 台需要另投入成本 $C(x)$(万元).当年产量不足80台时，$C(x)=\frac{1}{2}x^2+40x$，当年产量不小于80台时，$C(x)=101x+\frac{8\,100}{x}-2\,180$，若每台设备售价为100万元，通过市场分析，该企业生产的电子设备能全部售完.

(1)求年利润 y(万元)关于年产量 x(台)的函数关系式；

(2)年产量为多少台时，该企业在这一电子设备的生产中所获利润最大？并求出这个最大利润.

跟踪训练 3

经市场调查,某城市的一种小商品在过去的近 20 天内的日销售量(件)与价格(元)均为时间 t(天)的函数,且日销售量近似满足 $g(t)=80-2t$,价格近似满足 $f(t)=\begin{cases}15+\frac{1}{2}t,0\leqslant t\leqslant 10,\\25-\frac{1}{2}t,10\leqslant t\leqslant 20.\end{cases}$

(1)试写出该种商品的日销售额 y 与时间 $t(0\leqslant t\leqslant 20)$的函数表达式;

(2)求该种商品的日销售额 y 的最大值与最小值.

【课堂小结】

1. 知识清单:

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$(a,b 为常数,$a\neq 0$)
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq 0$)
分段函数模型	$f(x)=\begin{cases}f_1(x),x\in D_1,\\f_2(x),x\in D_2,\\\cdots,\\f_n(x),x\in D_n\end{cases}$
幂函数模型	$f(x)=ax^{\alpha}+b$(a,b,α 为常数,$a\neq 0$)

2. 方法归纳:配方法、判别式法、换元法.

3. 常见误区:函数的实际应用问题易忽略函数的定义域.

随堂演练

1. 某商店同时卖出两件外套,售价均为 168 元,以成本计算,一套盈利 20%,另一套亏损 20%,此时商店 ( )

A. 不亏不盈 B. 盈利 37.2 元

C. 亏损 14 元 D. 盈利 14 元

2. 据调查,某存车处在某星期日的存车量为 4 000 辆次,其中电动车存车费是每辆一次 0.3 元,自行车存车费是每辆一次 0.2 元. 若自行车存车数为 x 辆次,存车总收入为 y 元,则 y 关于 x 的函数关系式是 ( )

A. $y=0.1x+800(0\leqslant x\leqslant 4\ 000)$

B. $y=0.1x+1\ 200(0\leqslant x\leqslant 4\ 000)$

C. $y=-0.1x+800(0\leqslant x\leqslant 4\ 000)$

D. $y=-0.1x+1\ 200(0\leqslant x\leqslant 4\ 000)$

3. 某药品分两次降价,假设平均每次降价的百分率为 x.已知该药品的原价是 m 元,降价后的价格是 y 元,则 y 关于 x 的函数关系式是 ( )

A. $y=m(1-x)^2$ B. $y=m(1+x)^2$

C. $y=2m(1-x)$ D. $y=2m(1+x)$

4. 某药厂研制出一种新型疫苗,投放市场后其广告投入 x(万元)与药品利润 y(万元)存在的关系为 $y=x^{\alpha}$(α 为常数),其中 x 不超过 5 万元. 已知去年投入广告费用为 3 万元时,药品利润为 27 万元,若今年广告费用投入 5 万元,预计今年药品利润为________万元.

提醒:完成作业 第三章 3.4

章末复习课

知识网络

- 函数的概念与性质
  - 概念
    - 定义域
    - 对应关系
    - 值域
  - 表示方法
    - 列表法
    - 解析法
    - 图象法
  - 基本性质
    - 单调性与最大(小)值
    - 奇偶性
      - 奇偶性的定义
      - 图象特征
  - 幂函数
  - 函数的应用(一)

一、求函数的定义域、值域

1. 求函数定义域的常用依据是分母不为0,偶次根式中被开方数大于或等于0等,由几个式子构成的函数,其定义域是使各式子有意义的集合的交集;函数的值域是在函数的定义域下函数值的取值范围,一般是利用函数的图象或函数的单调性求值域.
2. 掌握集合的运算,解简单的不等式,提升逻辑推理和数学抽象素养.

例1 已知函数 $y=f(x-1)$ 的定义域是 $[-1,2]$,则 $y=f(1-3x)$ 的定义域为 ( )

A. $\left[-\frac{1}{3},0\right]$ B. $\left[-\frac{1}{3},3\right]$

C. $[0,1]$ D. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

跟踪训练1

函数 $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}-\frac{1}{x^2-9}$ 的定义域为________.

二、函数的图象

1. 会根据函数的解析式及性质判断函数的图象,利用函数的图象可以直观观察函数值域、最值、单调性、奇偶性等,重点是一次函数、二次函数、反比例函数及幂函数图象.
2. 掌握简单的基本函数图象,提升直观想象和数据分析素养.

例2 已知函数 $f(x)=|-x^2+2x+3|$.

(1)画出函数图象并写出函数的单调区间;

(2)求集合 $M=\{m|$使方程 $f(x)=m$ 有四个不相等的实数根$\}$.

跟踪训练2

已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x, x\leqslant 0,\\ -x^2+2x, x>0,\end{cases}$ 方程 $f^2(x)-bf(x)=0, b\in(0,1)$,则方程的根的个数是 ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

三、函数的性质

1. 函数的性质主要有定义域、值域、单调性和奇偶性,利用函数的单调性和奇偶性求值、比较大小、解不等式是重点考查内容,解不等式时经常结合图象,要注意勿漏定义域的影响.
2. 掌握单调性和奇偶性的判断和证明,会简单的综合运用,提升数学抽象、逻辑推理和直观想象素养.

例3 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明;

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时,判断 $f(x)$ 的单调性并证明;

(3)在(2)的条件下,若实数 m 满足 $f(3m)>f(5-2m)$,求 m 的取值范围.

跟踪训练 3

已知函数 $f(x)=\dfrac{mx^2+2}{3x+n}$ 是奇函数，且 $f(2)=\dfrac{5}{3}$.

(1)求实数 m 和 n 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的最值.

四、函数的应用

1. 以现实生活为背景，解决生活中的成本最少、利润最高等问题，一般是通过构造一次函数、二次函数、幂函数、分段函数等数学模型，能运用函数思想处理现实生活中的简单应用问题. 能将实际问题转化为熟悉的数学模型，建立合适的数学模型解决简单的实际问题.
2. 通过构造数学模型解决实际问题，重点提升数学建模素养和数学运算素养.

例 4 一个工厂生产某种产品每年需要固定投资 100 万元，此外每生产 1 件该产品还需要增加投资 1 万元，年产量为 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 件. 当 $x\leqslant 20$ 时，年销售总收入为 $(33x-x^2)$ 万元；当 $x>20$ 时，年销售总收入为 260 万元. 记该工厂生产并销售这种产品所得的年利润为 y 万元. (年利润 = 年销售总收入 − 年总投资)

(1)求 y(万元)与 x(件)的函数关系式；

(2)当该工厂的年产量为多少件时，所得年利润最大？最大年利润是多少？

跟踪训练 4

某村充分利用自身资源，大力发展养殖业以增加收入. 计划共投入 80 万元，全部用于甲、乙两个项目，要求每个项目至少要投入 20 万元. 在对市场进行调研时，发现甲项目的收益 y_1 与投入 x(单位：万元)满足 $y_1=\begin{cases}5\sqrt{x}+20, 20\leqslant x<36,\\ 50, 36\leqslant x\leqslant 60,\end{cases}$ 乙项目的收益 y_2 与投入 x(单位：万元)满足 $y_2=\dfrac{1}{2}x+20$.

(1)当甲项目的投入为 25 万元时，求甲、乙两个项目的总收益；

(2)问甲、乙两个项目各投入多少万元时，总收益最大.

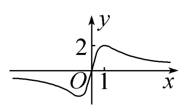
随堂演练

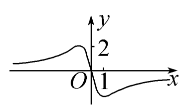
1. 函数 $y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-4x}$ 的定义域为 ( )

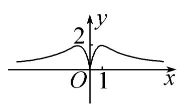
A. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$

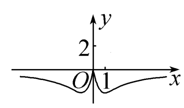
C. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$

2. 函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

3. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$，则 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 等于 ( )

A. $-\dfrac{27}{8}$　B. $-\dfrac{1}{8}$　C. $\dfrac{1}{8}$　D. $\dfrac{27}{8}$

CHAPTER 4

第四章

指数函数与对数函数

4.1 指数

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

【学习目标】1. 理解 n 次方根、根式的概念. 2. 能正确运用根式运算性质化简求值. 3. 会对分式和分数指数幂进行转化. 4. 掌握并运用有理数指数幂的运算性质.

一、n 次方根

问题 1 如果 $x^2=a$,那么 x 叫做 a 的什么?这样的 x 有几个? $x^3=a$ 呢?

问题 2 类比平方根、立方根的概念,试着说说 4 次方根、5 次方根、10 次方根等,你认为 n 次方根应该是什么?

【知识梳理】

1. n 次方根的定义

一般地,如果 $x^n=a$,那么 x 叫做 a 的________,其中 $n>1$,且 $n\in\mathbf{N}^*$.

2. n 次方根的性质

n 为奇数	n 为偶数		
$a\in\mathbf{R}$	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$x=$______	$x=$______	$x=0$	不存在

3. 根式

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做________,这里 n 叫做________,a 叫做________.

4. 根式的性质

(1)________没有偶次方根.

(2)0 的任何次方根都是 0,记作 $\sqrt[n]{0}=$________.

(3)$(\sqrt[n]{a})^n=$________($n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1$).

(4)$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_,a\geqslant 0,\\ -a,a<0\end{cases}$($n$ 为大于 1 的偶数).

例 1 (1)化简下列各式:

①$\sqrt[5]{(-2)^5}+(\sqrt[5]{-2})^5$;

②$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6$；

③$\sqrt[4]{(x+2)^4}$.

(2)已知$-3<x<3$，求$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}$的值.

反思感悟　正确区分$\sqrt[n]{a^n}$与$(\sqrt[n]{a})^n$

(1)$\sqrt[n]{a^n}$中的a可以是全体实数，$\sqrt[n]{a^n}$的值取决于n的奇偶性.

(2)$(\sqrt[n]{a})^n$已暗含$\sqrt[n]{a}$有意义，根据n的奇偶性可知a的范围.

跟踪训练1

化简下列各式：

(1)$\sqrt[7]{(-2)^7}$；

(2)$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(\pi-4)^3}$；

(3)$\sqrt[4]{(3a-3)^4}\ (a\leqslant 1)$；

(4)$\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[4]{(1-a)^4}$.

二、分数指数幂

问题 3 当根式的被开方数的指数不能被根指数整除的根式，比如$\sqrt[3]{a^2}$，$\sqrt[4]{a^2}$，$\sqrt[3]{a^5}$，$\sqrt[9]{a^3}$ $(a>0)$，是否也可以表示为分数指数幂的形式？如何表示？

【知识梳理】

根式与分数指数幂的互化

(1)规定正数的正分数指数幂的意义是：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(2)规定正数的负分数指数幂的意义是：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(3)0 的正分数指数幂等于________，0 的负分数指数幂________.

整数指数幂的运算性质，可以推广到有理数指数幂，即：

①$a^ra^s=a^{r+s}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

②$(a^r)^s=a^{rs}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

③$(ab)^r=a^rb^r$ $(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

拓展：①$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

②$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$ $(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$

例 2 (1)化简$\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$的结果是 ( )

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 3 D. 5

(2)$\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a}}$ $(a>0)$的分数指数幂表示为 ( )

A. $a^{\frac{1}{2}}$ B. $a^{\frac{3}{2}}$ C. $a^{\frac{3}{4}}$ D. 都不对

(3)化简$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$ $(a>0)$的结果是 ( )

A. $\sqrt{3a}$ B. $\sqrt[6]{a^7}$

C. $\sqrt{\frac{6}{a}}$ D. $\sqrt{6a}$

反思感悟 根式与分数指数幂互化的规律

(1)根指数$\xrightleftharpoons{\text{化为}}$分数指数的分母，被开方数(式)的指数$\xrightleftharpoons{\text{化为}}$分数指数的分子.

(2)在具体计算时，通常会把根式转化成分数指数幂的形式，然后利用有理数指数幂的运算性质解题.

跟踪训练 2

(1)求值：$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=$________.

(2)用分数指数幂表示 $a\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}}$ $(a>0)=$________.

三、有理数指数幂的运算性质

例 3 (1)$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^3=$________.

(2)计算:$\sqrt{\frac{25}{9}}-\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}-(\pi-3)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(2)$2x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{4}{3}})(x,y>0)$.

反思感悟 关于指数式的化简、求值问题

(1)无论是化简还是求值,一般的运算顺序是先乘方,再乘除,最后加减.

(2)仔细观察式子的结构特征,确定运算层次,避免运用运算性质时出错.

跟踪训练 3

(1)$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(-2)^0-\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$;

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)n 次方根的概念、表示及性质.

(2)根式的概念及性质.

(3)分数指数幂与根式的相互转化.

(4)分数指数幂的运算性质.

2. 方法归纳:转化法

3. 常见误区:

(1)对于$\sqrt[n]{a}$,当 n 为偶数时,$a\geqslant0$.

(2)混淆$(\sqrt[n]{a})^n$ 和$\sqrt[n]{a^n}$.

随堂演练

1. $(\sqrt[4]{2})^4$运算的结果是 ( )

A. 2 B. -2

C. ±2 D. 不确定

2. 若 $a<\frac{1}{4}$,则化简$\sqrt{(4a-1)^2}$的结果是 ( )

A. $4a-1$ B. $1-4a$

C. $-\sqrt{4a-1}$ D. $-\sqrt{1-4a}$

3. 下列运算中,正确的是 ( )

A. $a^2\cdot a^3=a^5$

B. $(-a^2)^3=(-a^3)^2$

C. $(\sqrt{a}-1)^0=1$

D. $(-a^2)^3=a^6$

4. 计算:$0.25\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}-4\div2^0-\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=$________.

提醒:完成作业 第四章 4.1 4.1.1

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质

【学习目标】1. 能结合教材探究了解无理数指数幂. 2. 结合有理数指数幂的运算性质掌握实数指数幂的运算性质.

一、无理数指数幂的运算

问题 阅读课本 108 页的探究,你发现了什么?

【知识梳理】

1. 无理数指数幂:一般地,无理数指数幂 a^{α}($a>0$,α 为无理数)是一个确定的________.

2. 实数指数幂的运算法则

(1)$a^r a^s=a^{r+s}$($a>0,r,s\in\mathbf{R}$).

(2)$(a^r)^s=a^{rs}$($a>0,r,s\in\mathbf{R}$).

(3)$(ab)^r=a^r b^r$($a>0,b>0,r\in\mathbf{R}$).

(4)拓展:$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$($a>0,r,s\in\mathbf{R}$).

例 1 计算下列各式的值:

(1)$(\sqrt{8^{\sqrt{3}}}\times\sqrt[3]{3^{\sqrt{3}}})^{2\sqrt{3}}$;

(2)$a^{\frac{\pi}{6}}a^{\frac{7\pi}{6}}a^{-\frac{4\pi}{3}}$($a>0$);

(3)$\left(\dfrac{\pi^{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\pi^{\sqrt{3}}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

反思感悟 关于无理数指数幂的运算

(1)无理数指数幂的运算性质与有理数指数幂的运算性质相同;

(2)若式子中含有根式,一般把底数中的根式化为指数式,指数中的根式可以保留直接运算.

跟踪训练 1

计算下列各式的值(式中字母均是正数):

(1)$\left(2^{\sqrt{3}}\sqrt{m^{\sqrt{3}}}\right)^{2\sqrt{3}}$;

(2)$a^{\frac{\pi}{3}}a^{\frac{2\pi}{3}}a^{-\pi}$.

二、实际问题中的指数运算

例 2 从盛满 2 升纯酒精的容器里倒出 1 升,然后加满水,再倒出 1 升混合溶液后又用水填满,以此继续下去,则至少应倒________次后才能使纯酒精体积与总溶液的体积之比低于 10%.

反思感悟 指数运算在实际问题中的应用

在成倍数递增(递减)、固定增长率等问题中,常常用到指数运算,用来计算增减的次数、增减前后的数量等.

跟踪训练 2

如果在某种细菌培养过程中,细菌每 10 分钟分裂一次(1 个分裂成 2 个),那么经过 1 小时,一个这种细菌可以分裂成________个.

三、实数指数幂的综合运用

例 3 (1)已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$,则 $x^2+x^{-2}=$________.

(2)已知 $x+x^{-1}=7$,求值:

①$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$;

②x^2-x^{-2}.

跟踪训练 3

已知 $a^m=4$,$a^n=3$,则$\sqrt{a^{m-2n}}$的值为 ( )

A. $\frac{2}{3}$　　B. 6

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)无理数指数幂的运算.

(2)实际问题中的指数运算.

(3)实数指数幂的综合运用.

2. 方法归纳:整体代换法.

3. 常见误区:在运用分数指数幂的运算性质化简时,其结果不能同时含有根式和分数指数,也不能既含有分母又含有负指数.

随堂演练

1. 计算$[(-\sqrt{2})^2]^{-\frac{1}{2}}$的结果是 ( )

A. $\sqrt{2}$

B. $-\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ 化为分数指数幂为 ( )

A. $2^{\frac{3}{2}}$

B. $2^{\frac{3}{4}}$

C. $2^{\frac{7}{4}}$

D. $2^{\frac{7}{8}}$

3. 已知 $x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=5(x>0)$,那么 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$等于 ( )

A. $\sqrt{7}$　　B. $-\sqrt{7}$

C. $\pm\sqrt{7}$　　D. 7

4. 若 $10^x=3$,$10^y=4$,则 $10^{2x-y}=$________.

提醒:完成作业　第四章　4.1　4.1.2

4.2 指数函数

4.2.1 指数函数的概念

【学习目标】1. 理解指数函数的概念,了解对底数的限制条件的合理性. 2. 了解指数增长型和指数衰减型在实际问题中的应用.

一、指数函数的概念

问题 1 阅读课本 111 页 ~ 113 页,你有什么样的收获?

【知识梳理】

指数函数的概念:一般地,函数________($a>0$,且 $a\neq1$)叫做指数函数,其中指数 x 是自变量,函数的定义域是 **R**.

例 1 (1)给出下列函数:①$y=2\cdot3^x$;②$y=3^{x+1}$;③$y=3^x$;④$y=x^3$;⑤$y=(-2)^x$.其中,指数函数的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

(2)若函数 $y=(2a-1)^x$(x 是自变量)是指数函数,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

B. $[0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

D. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

反思感悟 判断一个函数是否为指数函数的方法

(1)底数的值是否符合要求.

(2)a^x 前的系数是否为 1.

(3)指数是否符合要求.

跟踪训练 1

(1)下列是指数函数的是 ( )

A. $y=-3^x$ B. $y=2^{x^2-1}$

C. $y=a^x$ D. $y=\pi^x$

(2)若函数 $y=(a^2-3a+3)\cdot a^x$ 是指数函数,则 a 的值为________.

二、求指数函数的解析式或求值

例 2 若函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$的值为 ( )

A. 2 B. -2 C. $-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

反思感悟 (1)求指数函数的解析式时,一般采用待定系数法,即先设出函数的解析式,然后利用已知条件,求出解析式中的参数,从而得到函数的解析式,其中掌握指数函数的概念是解决这类问题的关键.

(2)求指数函数的函数值的关键是求出指数函数的解析式.

跟踪训练 2

指数函数 $y=f(x)$的图象经过点 $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$,那么 $f(4)f(2)$等于 ( )

A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

三、指数增长型和指数衰减型函数的实际应用

问题 2 将一张报纸连续对折,折叠次数 x 与对应的层数 y 之间存在什么关系?对折后的面积 S(设原面积为 1)与折叠的次数有怎样的关系?

【知识梳理】

1. $y=ka^x(k>0,a>0$ 且 $a\neq1)$，当________时为指数增长型函数模型.

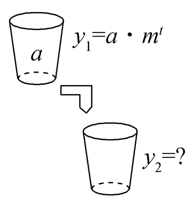
2. $y=ka^x(k>0,a>0$ 且 $a\neq1)$，当________时为指数衰减型函数模型.

例 3 (1)某种细菌经 60 分钟培养，可繁殖为原来的 2 倍，且知该细菌的繁殖规律为 $y=10e^{kt}$，其中 k 为常数，t 表示时间(单位:小时)，y 表示细菌个数，10 个细菌经过 7 小时培养，细菌能达到的个数为 ( )

A. 640　　B. 1 280

C. 2 560　　D. 5 120

(2)有容积相等的桶 A 和桶 B，开始时桶 A 中有 a 升水，桶 B 中无水. 现把桶 A 的水注入桶 B，t 分钟后，桶 A 的水剩余 $y_1=am^t$(升)，其中 m 为正常数. 假设 5 分钟后，桶 A 和桶 B 的水相等，要使桶 A 的水只有 $\frac{a}{16}$ 升，必须再经过 ( )



A. 12 分钟　　B. 15 分钟

C. 20 分钟　　D. 25 分钟

反思感悟 关于函数 $y=ka^x$ 在实际问题中的应用

(1)函数 $y=ka^x$ 是用来刻画指数增长或指数衰减变化规律的非常有用的函数模型，一般当 $k>0$ 时，若 $a>1$，则刻画指数增长变化规律；若 $0<a<1$，则刻画指数衰减变化规律.

(2)解决此类问题可利用待定系数法，根据条件确定出解析式中的系数后，利用指数运算解题.

跟踪训练 3

春天来了，某池塘中的荷花枝繁叶茂，已知每一天新长出的荷叶覆盖水面面积是前一天的 2 倍，若荷叶 20 天可以完全长满池塘水面，当荷叶刚好覆盖水面面积一半时，荷叶已生长了________天.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)指数函数的定义.

(2)指数增长型和指数衰减型函数模型.

2. 方法归纳:待定系数法.

3. 常见误区:易忽视指数函数的底数 a 的限制条件:$a>0$ 且 $a\neq1$.

随堂演练

1. 下列各函数中，是指数函数的是 ( )

A. $y=(-4)^x$　　B. $y=-4^x$

C. $y=3^{x-1}$　　D. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. 若函数 $y=(m^2-m-1)\cdot m^x$ 是指数函数，则 m 等于 ( )

A. -1 或 2　　B. -1

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 为响应国家退耕还林的号召，某地的耕地面积在最近 50 年内减少了 10%，如果按此规律，设 2016 年的耕地面积为 m，则 2021 年的耕地面积为 ( )

A. $(1-0.1^{250})m$

B. $0.9^{\frac{1}{10}}m$

C. 0.9^{250} m

D. $(1-0.9^{\frac{1}{10}})m$

4. 若函数 $f(x)$ 是指数函数，且 $f(2)=2$，则 $f(x)=$________.

提醒:完成作业　第四章　4.2　4.2.1

4.2.2　指数函数的图象和性质(一)

【学习目标】1.掌握指数函数的图象和性质. 2.学会利用指数函数的图象和性质解决简单的函数定义域的问题.

一、指数函数的图象

问题 1　用列表、描点、连线的画图步骤,先完成下列表格,再画出指数函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.

x	-2	-1	0	1	2
$y=2^x$					
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$					

问题 2　通过图象,分析 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的性质并完成下列表格.

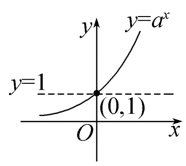
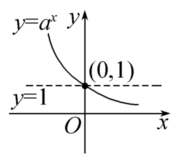
函数	$y=2^x$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
定义域		
值域		
单调性		
最值		
奇偶性		
特殊点		
y 的变换情况	当 $x<0$ 时,______________;当 $x>0$ 时,______________	当 $x<0$ 时,______________;当 $x>0$ 时,______________

问题 3　比一比 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象有哪些相同点?有哪些不同点?

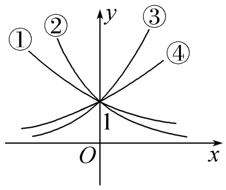
问题 4　再选取底数,$a=3$,$a=4$,$a=\frac{1}{3}$,$a=\frac{1}{4}$,在同一个坐标系中画出相应的指数函数的图象,观察这些图象的位置和变化趋势,它们有哪些共性?

【知识梳理】

指数函数的图象和性质

		$a>1$	$0<a<1$
图象			
性质	定义域	**R**	
	值域	______________	
	最值	______________	
	过定点	过定点______________,即 $x=$______________时,$y=$______________	
	函数值的变化	当 $x<0$ 时,______________;当 $x>0$ 时,______________	当 $x>0$ 时,______________;当 $x<0$ 时,______________
	单调性	在 **R** 上是______________	在 **R** 上是______________
	奇偶性		
	对称性	$y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称	

例 1　如图是指数函数①$y=a^x$；②$y=b^x$；③$y=c^x$；④$y=d^x$ 的图象，则 a,b,c,d 与 1 的大小关系是　　　　　　　　　　　　　(　　)



A. $a<b<1<c<d$　　B. $b<a<1<d<c$

C. $1<a<b<c<d$　　D. $a<b<1<d<c$

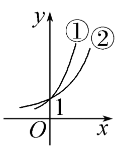
反思感悟　解决指数函数图象问题的注意点

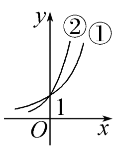
(1)熟记当底数 $a>1$ 和 $0<a<1$ 时，图象的大体形状.

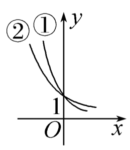
(2)在 y 轴右侧，指数函数的图象“底大图高”.

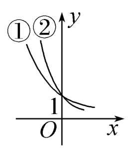
跟踪训练 1

已知 $0<m<n<1$，则指数函数①$y=m^x$；②$y=n^x$ 的图象为　　　　　　　　　　　　　(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

二、与指数函数有关的定义域问题

例 2　求下列函数的定义域：

(1)$y=2^{3-x}$；

(2)$y=3^{2x+1}$；

(3)$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x}$；

(4)$y=0.7^{\frac{1}{x}}$.

反思感悟　定义域：形如 $y=a^{f(x)}$ 形式的函数的定义域是使得 $f(x)$ 有意义的 x 的取值集合.

注意：(1)通过建立不等关系求定义域时，要注意解集为各不等关系解集的交集.

(2)当指数型函数的底数含字母时，在求定义域时要注意分类讨论.

跟踪训练 2

求下列函数的定义域、值域：

(1)$y=\dfrac{3^x}{1+3^x}$；

(2)$y=2^{\frac{1}{x-4}}$.

三、指数函数图象的应用

例 3　(1)若函数 $f(x)=2a^{x+m}-n(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过点$(-1,4)$，则 $m+n$ 等于　(　　)

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -2

(2)要使 $g(x)=3^{x+1}+t$ 的图象不经过第二象限，则 t 的取值范围为　　　　　　　(　　)

A. $t\leqslant-1$　　　　B. $t<-1$

C. $t\leqslant-3$　　　　D. $t\geqslant-3$

反思感悟　与指数函数相关的图象问题

(1)定点问题：令函数解析式中的指数为 0，即可求出横坐标，再求纵坐标即可.

(2)平移问题：对于横坐标 x 满足“左加右减”.

跟踪训练 3

(1)函数 $f(x)=2a^{x+1}-3(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过的定点是________.

(2)已知直线 $y=2a$ 与函数 $y=|2^x-2|$ 的图象有两个公共点，求实数 a 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)指数函数的图象.

(2)指数函数的性质：定义域、值域、单调性、

奇偶性、对称性及过定点.

(3)函数图象的应用.

2. 方法归纳:数形结合法.

3. 常见误区:形如函数 $y=a^{f(x)}$($a>0$ 且 $a\neq1$)过定点的问题,要使 $f(x)=0$.

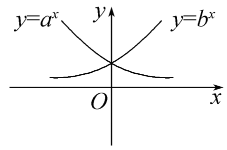
随堂演练

1.函数 $f(x)=\pi^{x}$ 与 $g(x)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x}$ 的图象关于 ( )

A. 原点对称　　B. x 轴对称

C. y 轴对称　　D. 直线 $y=-x$ 对称

2.指数函数 $y=a^{x}$ 与 $y=b^{x}$ 的图象如图所示,则 ( )



A. $a<0,b<0$

B. $a<0,b>0$

C. $0<a<1,b>1$

D. $0<a<1,0<b<1$

3.函数 $f(x)=3-a^{x+1}$($a>0$,且 $a\neq1$)的图象恒过定点 ( )

A. $(-1,2)$　　B. $(1,2)$

C. $(-1,1)$　　D. $(0,2)$

4.函数 $y=0.7^{\frac{1}{x^2-1}}$的定义域为________.

提醒:完成作业　第四章　4.2　4.2.2

4.2.2　指数函数的图象和性质(二)

【学习目标】1. 会利用指数函数的单调性比较大小和解指数不等式.　2. 能利用函数的单调性求简单的函数定义域与值域的问题.

一、利用单调性比较大小

例 1　(1)$1.1^{1.1}$,$1.1^{0.9}$;

(2)$0.1^{-0.2}$,$0.1^{0.9}$;

(3)$3^{0.1}$,$\pi^{0.1}$;

(4)$1.7^{0.1}$,$0.9^{1.1}$;

(5)$0.7^{0.8}$,$0.8^{0.7}$.

跟踪训练 1

(1)下列大小关系正确的是 ( )

A. $0.4^{3}<3^{0.4}<\pi^{0}$

B. $0.4^{3}<\pi^{0}<3^{0.4}$

C. $3^{0.4}<0.4^{3}<\pi^{0}$

D. $\pi^{0}<3^{0.4}<0.4^{3}$

(2)设 $a=0.6^{0.6}$,$b=0.6^{1.5}$,$c=1.5^{0.6}$,则 a,b,c 的大小关系是 ( )

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

二、简单的指数不等式的解法

例 2　(1)解不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}\leqslant2$;

(2)已知 $a^{x^2-3x+1}<a^{x+6}$($a>0,a\neq1$),求 x 的取值范围.

反思感悟(1)利用指数型函数的单调性解不等式,需将不等式两边都凑成底数相同的指数式.

(2)解不等式 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$($a>0,a\neq1$)的依据是指数型函数的单调性,要养成判断底数取值范围的习惯,若底数不确定,就需进行分类讨论,即 $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Rightarrow f(x)>g(x)$($a>1$)或 $f(x)<g(x)$($0<a<1$).

跟踪训练 2

(1)求下列函数的定义域.

①$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$;②$y=\sqrt{2^x-1}$.

(2)不等式$2^{3-2x}<0.5^{3x-4}$的解集为________.

三、定区间上的值域问题

例 3 函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在区间$[-2,2]$上的最小值是 ( )

A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. -4 D. 4

反思感悟 关于定区间上的值域问题

(1)求定区间上的值域关键是确定函数的单调性,如果底数中含字母,则分$a>1$,$0<a<1$两种情况讨论,单调性确定后,根据单调性求最值即可.

(2)特别地,如果是最大值与最小值的和,则不需要讨论,因为无论单调递增还是递减,最值总在端点处取到.

跟踪训练 3

若$2^{x^2+1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$,则函数$y=2^x$的值域是( )

A. $\left[\frac{1}{8},2\right)$ B. $\left[\frac{1}{8},2\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{8}\right]$ D. $[2,+\infty)$

四、指数函数图象和性质的综合运用

例 4 已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)=\frac{-2^x+a}{2^x+1}$是奇函数.

(1)判断并证明该函数在定义域$\mathbf{R}$上的单调性;

(2)若对任意的$t\in\mathbf{R}$,不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$恒成立,求实数k的取值范围.

反思感悟 函数性质的综合应用

(1)解题过程中要关注、体会性质的应用,如果性质应用不充分,会导致解题步骤繁琐或无法求解,如本题中奇偶性、单调性的应用,可以将复杂的指数运算转化为一元二次不等式问题.

(2)一元二次不等式的恒成立问题,可以结合相应的一元二次函数的图象,转化为等价的条件求解,恒成立问题还可以利用分离参数、转化为最值问题等方法求解.

跟踪训练 4

已知函数$f(x)=4^x+a\cdot2^x+3$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=-4$,且$x\in[0,2]$时,求函数$f(x)$的值域;

(2)若函数$f(x)$在$[0,2]$上的最小值为1,求实数a的值.

【课堂小结】

1. 知识清单:

 (1)比较大小.

 (2)解不等式、方程.

 (3)定区间上的值域问题.

 (4)指数函数性质的综合运用.

2. 方法归纳:转化与化归.

3. 常见误区:研究$y=a^{f(x)}$型函数,易忽视讨论$a>1$还是$0<a<1$.

随堂演练

1. 已知$0.3^m>0.3^n$,则m,n的大小关系为( )

 A. $m>n$ B. $m<n$

 C. $m=n$ D. 不能确定

2. 已知$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$,$x\in\mathbf{R}$,则$f(x)$是 ( )

 A. 奇函数且在$(0,+\infty)$上是增函数

B. 偶函数且在$(0,+\infty)$上是增函数

C. 奇函数且在$(0,+\infty)$上是减函数

D. 偶函数且在$(0,+\infty)$上是减函数

3. 函数$f(x)=\sqrt{1-2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$的定义域为（　　）

A. $(-3,0]$

B. $(-3,1]$

C. $(-\infty,-3)\cup(-3,0]$

D. $(-\infty,-3)\cup(-3,1]$

4. 不等式$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$的解集为________.

提醒：完成作业　第四章　4.2　4.2.2

4.3　对数

4.3.1　对数的概念

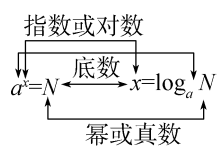
【学习目标】1. 了解对数、常用对数、自然对数的概念. 2. 会进行对数式与指数式的互化. 3. 会求简单的对数值.

一、对数的概念

问题1　我们知道若$2^x=4$，则$x=2$；若$3^x=81$，则$x=4$；若$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=128$，则$x=-7$等等这些方程，我们可以轻松求出$x$的值，但对于$2^x=3$，$1.11^x=2$，$10^x=5$等这样的指数方程，你能求出方程的解吗？

【知识梳理】

对数的定义：一般地，如果$a^x=N$，($a>0$，且$a\neq1$)，那么数x叫做以a为底N的对数，记作________，其中a叫做对数的________，N叫做________.



例1　若对数式$\log_{(t-2)}3$有意义，则实数t的取值范围是（　　）

A. $[2,+\infty)$

B. $(2,3)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$

D. $(2,+\infty)$

反思感悟　关于对数式中的取值范围

利用式子$\log_a b\Rightarrow\begin{cases}b>0,\\a>0,\\a\neq1,\end{cases}$求字母的范围.

跟踪训练1

在$M=\log_{(x-3)}(x+1)$中，要使式子有意义，x的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,3]$

B. $(3,4)\cup(4,+\infty)$

C. $(4,+\infty)$

D. $(3,4)$

二、对数与指数的互相转化

问题 2 现在你能解指数方程 $2^x=3$，$1.11^x=2$，$10^x=5$ 了吗？

【知识梳理】

两类特殊对数

(1)以 10 为底的对数叫做常用对数，并把 $\log_{10}N$ 记为 $\lg N$；

(2)以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数称为自然对数，并把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

例 2 将下列指数式与对数式互化：

(1) $\log_2 16=4$；

(2) $\log_{\frac{1}{3}}27=-3$；

(3) $\ln 100=4.606$；

(4) $4^3=64$；

(5) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$；

(6) $10^{-3}=0.001$.

反思感悟 指数式与对数式互化的思路

(1)指数式化为对数式：将指数式的幂作为真数，指数作为对数，底数不变，写出对数式.

(2)对数式化为指数式：将对数式的真数作为幂，对数作为指数，底数不变，写出指数式.

跟踪训练 2

下列指数式与对数式互化不正确的一组是（　　）

A. $10^0=1$ 与 $\lg 1=0$

B. $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$与 $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

C. $\log_3 9=\frac{1}{2}$与 $9^{\frac{1}{2}}=3$

D. $\log_5 5=1$ 与 $5^1=5$

三、对数的计算

问题 3　你能把 $2^0=1,2^1=2,\log_2 x=\log_2 x$ 化成对数式或指数式吗?

【知识梳理】

对数的性质

(1) $\log_a 1=$________($a>0$,且 $a\neq1$).

(2) $\log_a a=$________($a>0$,且 $a\neq1$).

(3)零和负数________.

(4)对数恒等式: $a^{\log_a N}=$________; $\log_a a^x=$________($a>0$,且 $a\neq1,N>0$).

例 3　(1)求下列各式的值.

①$\log_9 81=$________.

②$\log_{0.4}1=$________.

③$\ln e^2=$________.

(2)求下列各式中 x 的值.

①$\log_{27}x=-\frac{2}{3}$;

②$\log_x 16=-4$.

反思感悟 对数式中求值的基本思想和方法

(1)基本思想

在一定条件下求对数的值,或求对数式中参数字母的值,要注意利用方程思想求解.

(2)基本方法

①将对数式化为指数式,构建方程转化为指数问题.

②利用幂的运算性质和指数的性质计算.

跟踪训练 3

求下列各式的值:

(1) $\log_2 8$;

(2) $\log_9\frac{1}{9}$;

(3) $\ln e$;

(4) $\lg 1$.

四、利用对数性质求值

例 4 求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_2(\log_5 x)=0$;

(2) $\log_3(\lg x)=1$;

(3) $x=7^{1-\log_7 5}$.

跟踪训练 4

求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_8[\log_7(\log_2 x)]=0$;

(2) $\log_2[\log_3(\log_2 x)]=1$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

 (1) 对数的概念.

 (2) 自然对数、常用对数.

 (3) 指数式与对数式的互化.

 (4) 对数的性质.

2. 方法归纳:转化法.

3. 常见误区:易忽视对数式中底数与真数的范围.

随堂演练

1. 对数 $\log_{(a+3)}(5-a)$ 中,实数 a 的取值范围是 ( )

 A. $(-\infty,5)$

 B. $(-3,5)$

 C. $(-3,-2)\cup(-2,5)$

 D. $(-3,+\infty)$

2. $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$化为对数式为 ( )

 A. $\log_{\frac{1}{8}}2=-3$　　B. $\log_{\frac{1}{8}}(-3)=2$

 C. $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$　　D. $\log_2(-3)=\dfrac{1}{8}$

3. 已知 $\log_{a^2}b=c$,则有 ( )

 A. $a^{2b}=c$　　B. $a^{2c}=b$

 C. $b^c=2a$　　D. $c^{2a}=b$

4. 计算: $3\log_2 2+2\log_3 1-3\log_7 7+3\ln 1=$ ________.

提醒:完成作业　第四章　4.3　4.3.1

4.3.2 对数的运算

第 1 课时 对数的运算

【学习目标】 1. 掌握积、商、幂的对数运算性质,理解其推导过程和成立的条件.　2. 能熟练运用对数的运算性质进行化简求值.

一、对数的运算性质

问题 1 将指数式 $M=a^p$, $N=a^q$ 化为对数式,结合指数运算性质 $MN=a^pa^q=a^{p+q}$能否将其化为对数式?它们之间有何联系(用一个等式表示)?

问题 2 结合问题 1,若$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$,又能得到什么结论?

问题 3　结合问题 1,若 $M^n=(a^p)^n=a^{np}(n\in\mathbf{R})$,又能有何结果?

【知识梳理】

如果 $a>0$,且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$,那么

(1) $\log_a(MN)=$________;

(2) $\log_a\dfrac{M}{N}=$________;

(3) $\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$.

例 1　求下列各式的值.

(1) $\ln e^2$;

(2) $\log_3e+\log_3\dfrac{3}{e}$;

(3) $\lg 50-\lg 5$.

跟踪训练 1

求下列各式的值:

(1) $\log_3(27\times9^2)$;

(2) $\lg 5+\lg 2$;

(3) $\ln 3+\ln\dfrac{1}{3}$;

(4) $\log_35-\log_315$.

二、对数运算性质的运用

例 2　已知 $\lg 2=a$,$\lg 3=b$,则 $\lg\dfrac{12}{5}=$________.

跟踪训练 2

用 $\lg x$,$\lg y$,$\lg z$ 表示下列各式:

(1) $\lg(xyz)$;

(2) $\lg\dfrac{xy^2}{z}$;

(3) $\lg\dfrac{xy^3}{\sqrt{z}}$;

(4) $\lg\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

三、利用对数的运算性质化简、求值

例 3 计算下列各式的值：

(1) $(\lg 5)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2$；

(2) $\dfrac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$；

(3) $\log_5 35-2\log_5\frac{7}{3}+\log_5 7-\log_5 1.8$.

反思感悟 利用对数运算性质化简求值

(1)“收”：将同底的两个对数的和(差)合并为积(商)的对数，即公式逆用；

(2)“拆”：将积(商)的对数拆成同底的两个对数的和(差)，即公式的正用；

(3)“凑”：将同底数的对数凑成特殊值，如利用 $\lg 2+\lg 5=1$，进行计算或化简.

跟踪训练 3

计算下列各式的值：

(1) $\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2) $\lg 25+\frac{2}{3}\lg 8+\lg 5\times\lg 20+(\lg 2)^2$.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)对数的运算性质.

(2)对数运算性质的运用.

(3)利用对数的运算性质化简、求值.

2. 方法归纳：转化法.

3. 常见误区：要注意对数的运算性质的结构形式，易混淆，且不可自创运算法则.

随堂演练

1. 若 $a>0$，且 $a\neq1$，$x>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列各式：

①$(\log_a x)^n=n\log_a x$；

②$(\log_a x)^n=\log_a x^n$；

③$\log_a x=-\log_a \dfrac{1}{x}$；

④$\sqrt[n]{\log_a x}=\dfrac{1}{n}\log_a x$；

⑤$\dfrac{\log_a x}{n}=\log_a \sqrt[n]{x}$.

其中正确的有 ( )

A. 2 个 B. 3 个

C. 4 个 D. 5 个

2. $2\log_5 10+\log_5 0.25$ 等于 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

3. 已知 $\lg 3=a$，$\lg 7=b$，则 $\lg \dfrac{3}{49}$的值为 ( )

A. $a-b^2$ B. $a-2b$

C. $\dfrac{b^2}{a}$ D. $\dfrac{a}{b^2}$

4. $\dfrac{2\lg 4+\lg 9}{1+\frac{1}{2}\lg 0.36+\frac{1}{3}\lg 8}=$________.

提醒：完成作业 第四章 4.3 4.3.2 第 1 课时

第 2 课时 换底公式

【学习目标】1. 掌握换底公式及其推论. 2. 能熟练运用对数的运算性质进行化简求值.

一、对数的换底公式

问题 1 上节课我们学习了对数的运算性质，但对于一些式子，比如 $\log_4 8$，$\log_9 27$ 等式子的化简求值问题还不能做到，你能解决这个问题吗？

问题 2 是否对任意的 $\log_a b$ 都可以表示成 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$($a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1$)？说出你的理由.

【知识梳理】

1. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$($a>0$,且 $a\neq1$;$c>0$,且 $c\neq1$;$b>0$).

2. 对数换底公式的重要推论

(1)$\log_a N=\dfrac{1}{\log_N a}$($N>0$,且 $N\neq1$;$a>0$,且 $a\neq1$).

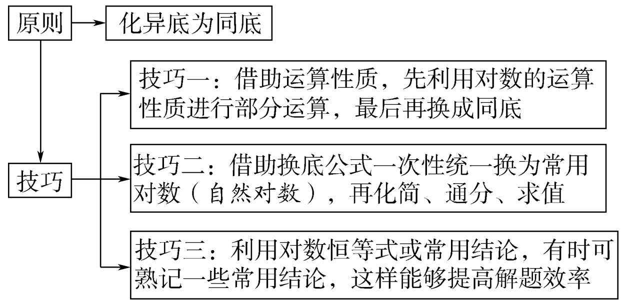
(2)$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$($a>0$,且 $a\neq1$;$b>0$).

(3)$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$($a>0$,$b>0$,$c>0$,$d>0$,且 $a\neq1$,$b\neq1$,$c\neq1$).

例 1 (1)计算:$(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$;

(2)已知 $\log_{18}9=a$,$18^b=5$,用 a,b 表示 $\log_{36}45$ 的值.

反思感悟 利用换底公式进行化简求值的原则和技巧



跟踪训练 1

(1)$\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是 ( )

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. 2

(2)计算:$\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5\dfrac{1}{3}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}$.

二、对数运算性质的综合运用

例 2 (1)设 $3^a=4^b=36$，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的值；

(2)已知 $2^x=3^y=5^z$，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求 x,y,z.

反思感悟 利用对数式与指数式互化求值的方法

(1)在对数式、指数式的互化运算中，要注意灵活运用定义、性质和运算法则，尤其要注意条件和结论之间的关系，进行正确的相互转化.

(2)对于连等式可令其等于 $k(k>0)$，然后将指数式用对数式表示，再由换底公式可将指数的倒数化为同底的对数，从而使问题得解.

跟踪训练 2

已知 $3^a=5^b=c$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，求 c 的值.

三、实际问题中的对数运算

例 3 某化工厂生产一种溶液，按市场需求，杂质含量不能超过 0.1%.若初始时含杂质 2%，每过滤一次可使杂质含量减少$\frac{1}{3}$，要使产品达到市场要求，则至少应过滤的次数为(已知：$\lg 2\approx 0.301\ 0$，$\lg 3\approx 0.477\ 1$)　　(　　)

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

反思感悟 关于对数运算在实际问题中的应用

(1)在与对数相关的实际问题中，先将题目中数量关系理清，再将相关数据代入，最后利用对数运算性质、换底公式进行计算.

(2)在与指数相关的实际问题中，可将指数式利用取对数的方法，转化为对数运算，从而简化复杂的指数运算.

跟踪训练 3

标准的围棋棋盘共 19 行 19 列，361 个格点，每个格点上可能出现“黑”“白”“空”三种情况，因此有 3^{361}种不同的情况. 而我国北宋学者沈括在他的著作《梦溪笔谈》中也讨论过这个问题，他分析得出一局围棋不同的变化大约有“连书万字五十二”种，即 $10\ 000^{52}$，下列数据最接近$\frac{3^{361}}{10\ 000^{52}}$的是($\lg 3\approx 0.477$)　　(　　)

A. 10^{-37}　　B. 10^{-36}

C. 10^{-35}　　D. 10^{-34}

【课堂小结】

1.知识清单：

(1)换底公式.

(2)对数的实际应用.

2.方法归纳：换底公式、转化法.

3. 常见误区：要注意对数的换底公式的结构形式，易混淆.

随堂演练

1. $0.25^{-\frac{1}{2}}+\log_2 3\cdot\log_3 4$ 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{7}{4}$

2. 已知 $2^x=3$，$\log_4\frac{8}{3}=y$，则 $x+2y$ 的值为 (　　)

A. 3　　B. 8　　C. 4　　D. $\log_4 8$

3. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\log_3 6$ 等于 (　　)

A. $\frac{a+b}{a}$　　B. $\frac{a+b}{b}$

C. $\frac{a}{a+b}$　　D. $\frac{b}{a+b}$

4. 已知 $2^a=5^b=10$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$________.

提醒：完成作业　第四章　4.3　4.3.2　第 2 课时

4.4　对数函数

4.4.1　对数函数的概念

【学习目标】 1. 理解对数函数的概念. 2. 会求与对数函数有关的定义域问题. 3. 了解对数函数在生产实际中的简单应用.

一、对数函数的概念及应用

问题.我想问一下同学们，今天你向家长要零花钱了吗？构造向家长要零花钱的函数 $y=2^x$.

x	1	2	3	…	10	…		
y	2	4	8	…	1 024	…	1 048 576	1 073 741 824

在学习指数函数时，我们想知道的是，第几天我们能获得多少零花钱，而现在，我们知道的是，当你获得 1 024 元的时候，是在第 10 天，同学们可以大胆猜测一下，你在第几天可以获得 1 048 576 元和 1 073 741 824 元？

【知识梳理】

一般地，函数________叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是________.

例 1　(1)给出下列函数：

①$y=\log_{\frac{2}{3}}x^2$；②$y=\log_3(x-1)$；

③$y=\log_{(x+1)}x$；④$y=\log_{\pi}x$.

其中是对数函数的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

(2)已知对数函数 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$，则 $f\left(\frac{1}{32}\right)=$________.

跟踪训练 1

(1)下列函数是对数函数的是________(填序号).

①$y=\log_a(5+x)$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；②$y=\log_{(\sqrt{3}-1)}x$；

③$y=\log_3(-x)$；④$y=\log_{\sqrt{x}}3$ ($x>0$ 且 $x\neq1$).

(2)已知函数 $f(x)$ 是对数函数，且 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，则 $f(2\sqrt{2})=$________.

二、求函数的定义域

例 2　函数 $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为________.

反思感悟　求对数型函数的定义域需注意：

(1)真数大于 0.

(2)对数出现在分母上时，真数不能为 1.

(3)底数上含有自变量时，大于零且不等于 1.

跟踪训练 2

函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为________.

三、对数函数模型的应用

例 3　某企业 2019 年全年投入研发资金 1 亿元，为激励创新，该企业计划今年后每年投入的

研发资金比上年增长 8%,则该企业全年投入的研发资金开始超过 $\frac{4}{3}$ 亿元的年份是 ( )

(参考数据: $\lg 1.08\approx0.033$, $\lg 2\approx0.301$, $\lg 3\approx0.477$)

A. 2020　B. 2021　C. 2022　D. 2023

反思感悟　利用指数、对数函数解决应用问题

(1)列出指数关系式 $x=a^y$,并根据实际问题确定变量的范围;

(2)利用指对互化转化为对数函数 $y=\log_a x$;

(3)代入自变量的值后,利用对数的运算性质、换底公式计算.

跟踪训练 3

我国的 5G 通信技术领先世界,5G 技术的数学原理之一是著名的香农(Shannon)公式,香农提出并严格证明了在被高斯白噪声干扰的信道中,计算最大信息传送速率 C 的公式 $C=W\cdot\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$,其中 W 是信道带宽(赫兹),S 是信道内所传信号的平均功率(瓦),N 是信道内部的高斯噪声功率(瓦),其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 根据此公式,在不改变 W 的前提下,将信噪比从 99 提升至 λ,使得 C 大约增加了 60%,则 λ 的值大约为( )(参考数据: $10^{0.2}\approx1.58$)

A. 1 559　B. 3 943

C. 1 579　D. 2 512

【课堂小结】

1.知识清单:

(1)对数函数的概念和定义域.

(2)对数函数模型的简单应用.

2.方法归纳:待定系数法,转化法.

3. 常见误区:易忽视对数函数底数有限制条件.

随堂演练

1. 下列函数是对数函数的是 ( )

A. $y=\log_2 x$　B. $y=\ln(x+1)$

C. $y=\log_x \mathrm{e}$　D. $y=\log_x x$

2. 函数 $f(x)=\log_2(x-1)$ 的定义域是 ( )

A. $[1,+\infty)$　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　D. $(-\infty,1]$

3. 某种动物的数量 y(单位:只)与时间 x(单位:年)的函数关系式为 $y=a\log_2(x+1)$,若这种动物第 1 年有 100 只,则第 7 年它们的数量为 ( )

A. 300 只　B. 400 只

C. 500 只　D. 600 只

4. 若对数函数 $f(x)$ 的图象过点 $(9,2)$,则 $f\left(\frac{1}{3}\right)=$ ________.

提醒:完成作业　第四章　4.4　4.4.1

4.4.2　对数函数的图象和性质(一)

【学习目标】1. 初步掌握对数函数的图象和性质.　2. 会类比指数函数研究对数函数的性质.　3. 掌握对数函数的图象和性质的简单应用.

一、对数函数的图象和性质

问题 1　请同学们利用列表、描点、连线的画图步骤,先完成下列表格,再在同一坐标系下画出对数函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象.

x	…	0.25	0.5	1	2	4	8	16	32	…
$y=\log_2 x$	…									…
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	…									…

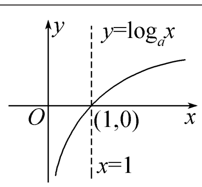
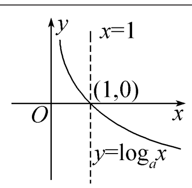
问题 2　通过观察函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象,分析性质,并完成下表:

函数	$y=\log_2 x$	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
定义域		
值域		
单调性		
最值		
奇偶性		
特殊点		
y 的变换情况	当 $0<x<1$ 时，______；当 $x>1$ 时，______	当 $0<x<1$ 时，______；当 $x>1$ 时，______
对称性	$y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象关于 x 轴对称	

问题 3　为了更好地研究对数函数的性质，我们特别选取了底数 $a=3,4,\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，你能在同一平面直角坐标系下作出它们的函数图象吗？

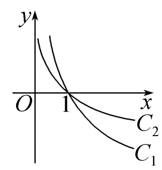
【知识梳理】

对数函数的图象和性质

	$y=\log_a x(a>0,且\ a\neq 1)$	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域		
值域	**R**	
单调性	在 $(0,+\infty)$ 上是增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数
最值		
奇偶性		
共点性	图象过定点______，即 $x=1$ 时，$y=0$	
函数值特点	$x\in(0,1)$ 时，$y\in$______；$x\in[1,+\infty)$ 时，$y\in$______	$x\in(0,1)$ 时，$y\in$______；$x\in[1,+\infty)$ 时，$y\in$______
对称性	函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象关于______对称	

续表

例 1　(1)如图，若 C_1,C_2 分别为函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的图象，则　　(　　)



A. $0<a<b<1$

B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$

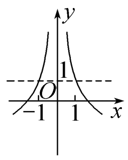
D. $b>a>1$

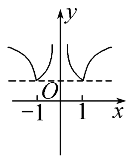
(2)若函数 $y=\log_a(x+b)+c(a>0,且\ a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $(3,2)$，则实数 $b=$______，$c=$______.

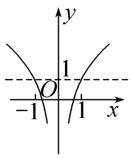
(3)已知 $f(x)=\log_a|x|(a>0,且\ a\neq 1)$ 满足 $f(-5)=1$，试画出函数 $f(x)$ 的图象.

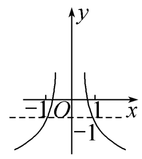
跟踪训练 1

(1)函数 $f(x)=\log_a|x|+1(a>1)$ 的图象大致为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

(2)画出函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象,并写出函数的值域及单调区间.

二、利用单调性比较对数值的大小

例 2　比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\log_3 1.9$, $\log_3 2$;

(2) $\log_2 3$, $\log_{0.3} 2$;

(3) $\log_a \pi$, $\log_a 3.14(a>0$, 且 $a\neq 1)$;

(4) $\log_5 0.4$, $\log_6 0.4$.

反思感悟 比较对数值大小时常用的四种方法

(1)同底数的利用对数函数的单调性.

(2)同真数的利用对数函数的图象或用换底公式转化.

(3)底数和真数都不同,找中间量.

(4)若底数为同一参数,则根据底数对对数函数单调性的影响,对底数进行分类讨论.

跟踪训练 2

比较大小:

(1) $\log_a 5.1$, $\log_a 5.9(a>0$, 且 $a\neq 1)$;

(2) $\log_3\pi$, $\log_2\sqrt{3}$, $\log_3\sqrt{2}$.

三、利用单调性解对数不等式

例 3　解下列关于 x 的不等式：

(1) $\log_{\frac{1}{7}}x>\log_{\frac{1}{7}}(4-x)$；

(2) $\log_a(2x-5)>\log_a(x-1)$；

(3) $\log_x\frac{1}{2}>1$.

反思感悟　对数不等式的三种考查类型及解法

(1) 形如 $\log_a x>\log_a b$ 的不等式，借助 $y=\log_a x$ 的单调性求解，如果 a 的取值不确定，需分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况进行讨论.

(2) 形如 $\log_a x>b$ 的不等式，应将 b 化为以 a 为底数的对数式的形式 $(b=\log_a a^b)$，再借助 $y=\log_a x$ 的单调性求解.

(3) 形如 $\log_{f(x)}a>\log_{g(x)}a$ ($f(x),g(x)>0$ 且不等于 1，$a>0$) 的不等式，可利用换底公式化为同底的对数进行求解，或利用函数图象求解.

跟踪训练 3

(1) 求满足不等式 $\log_3 x<1$ 的 x 的取值集合；

(2) 已知 $\log_{0.7}(2x)<\log_{0.7}(x-1)$，求 x 的取值范围.

【课堂小结】

1. 知识清单：

 (1) 对数函数的图象及性质.

 (2) 利用对数函数的图象及性质比较大小.

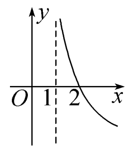
 (3) 利用单调性解对数不等式.

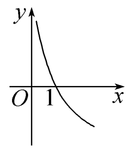
2. 方法归纳：分类讨论、数形结合法.

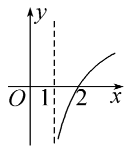
3. 常见误区：作对数函数图象时易忽视底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况.

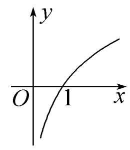
随堂演练

1. 函数 $y=\log_a(x-1)(0<a<1)$ 的图象大致是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 若 $a=2^{0.2}, b=\log_4 3.2, c=\log_2 0.5$,则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

3. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)<\log_{\frac{1}{2}}(5x-6)$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty,3)$　　B. $\left(-\dfrac{3}{2},3\right)$

C. $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{6}{5}\right)$　　D. $\left(\dfrac{6}{5},3\right)$

4. 若 $\log_a\dfrac{2}{3}<1$,则实数 a 的取值范围是______.

提醒:完成作业　第四章　4.4　4.4.2

4.4.2　对数函数的图象和性质(二)

【学习目标】1. 进一步掌握对数函数的图象和性质.　2. 利用单调性进一步求函数的定义域和简单值域问题.　3. 了解反函数的概念和图象特点.

一、与对数函数有关的定义域问题

例 1　求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\lg(2-x)}$;

(2) $y=\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$;

(3) $y=\dfrac{\log_4(4-x)}{x-3}$.

反思感悟　(1)对数函数的真数大于 0.

(2)求定义域的常用方法是解不等式(组),有时在解不等式(组)时,还要考虑函数的单调性.

(3)有时求定义域比较特殊,其解法为从外向里一层一层地将对数符号去掉,每去掉一层对数符号都要考虑函数的单调性,最后求出 x 的取值范围.

跟踪训练 1

求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{(2x+1)}\sqrt{3x+2}$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{2x+x^2}}{\lg(2x-1)}$.

二、与对数函数有关的综合性问题

例 2 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2$.

(1)若 $f(x)>0$,求 x 的取值范围;

(2)若 $x\in(-1,3]$,求 $f(x)$ 的值域.

反思感悟 (1)求对数型函数的值域一般是先求真数的范围,然后利用对数函数的单调性求解;(2)判断函数的奇偶性,一定要先求函数的定义域,再研究 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

跟踪训练 2

函数 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}(a>0$,且 $a\neq1)$的图象 ( )

A. 关于原点对称

B. 关于直线 $y=x$ 对称

C. 关于直线 $y=-x$ 对称

D. 关于 y 轴对称

三、反函数

问题 在同一平面直角坐标系下,画出函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2x$ 的图象,观察两函数图象的关系.

【知识梳理】

反函数:一般地,指数函数________($a>0$,且 $a\neq1$)与对数函数 $y=\log_ax$($a>0$,且 $a\neq1$)互为反函数. 它们的定义域与值域正好互换.

例 3 若函数 $y=f(x)$是函数 $y=2^x$ 的反函数,则 $f(f(2))$的值为 ( )

A. 16　B. 0　C. 1　D. 2

跟踪训练 3

函数 $y=\log_3x\left(\dfrac{1}{3}\leq x\leq81\right)$的反函数的定义域为 ( )

A. $(0,+\infty)$　B. $\left(\dfrac{1}{3},81\right)$

C. $(1,4)$　D. $[-1,4]$

【课堂小结】

1.知识清单:

(1)利用对数函数的单调性求函数的定义域.

(2)求简单对数的值域、最值、奇偶性问题.

2. 方法归纳:数形结合法.

3.常见误区:求对数型函数的定义域时,有时需求几部分的交集.

随堂演练

1.函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2x-1}}$的定义域为 ( )

A. $(0,2)$　B. $(0,2]$

C. $(2,+\infty)$　D. $[2,+\infty)$

2.函数 $y=x+\log_2x(x\geq1)$的值域为 ( )

A. $(1,+\infty)$　B. $(-\infty,1)$

C. $[1,+\infty)$　D. $[-1,+\infty)$

3.若函数 $f(x)=a^x+\log_a(x+1)$在 $[0,1]$上的最大值和最小值之和为 a,则 a 的值为 ( )

A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. 2　D. 4

4.若函数 $y=f(x)$是函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$)的反函数,其图象经过点$\left(\sqrt[3]{2},\dfrac{2}{3}\right)$,则 $a=$________.

提醒:完成作业　第四章　4.4　4.4.2

习题课　指数型函数、对数型函数的性质的综合

【学习目标】1. 会求指数型函数、对数型函数的单调性、值域等问题.　2. 掌握判断指数型函数、对数型函数单调性的方法.

一、指数型函数的单调性问题

例 1　(1)函数 $y=3^{\frac{1}{x}}$ 的单调递减区间是(　　)

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$

(2)判断函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 的单调性,并求其值域.

跟踪训练 1

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}$ 的单调递减区间为　(　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},+\infty)$

二、对数型函数的单调性问题

例 2　求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+5)$ 的单调区间.

跟踪训练 2

求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 的单调区间.

三、函数的综合应用

例 3　求函数 $f(x)=\log_2(4x)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{x}{2}$, $x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$的值域.

反思感悟　求对数型函数的值域一般是先求真数的范围,然后利用对数函数的单调性求解.

跟踪训练 3

求下列函数的值域:

(1)$f(x)=\log_2(3^x+1)$;

(2)$f(x)=\log_2\frac{x}{4}\cdot\log_2\frac{x}{2}(1\leqslant x\leqslant4)$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)指数型函数的单调性.

(2)求对数型函数的单调性及值域问题.

(3)指数型或对数型函数的综合应用.

2. 方法归纳:换元法.

3. 常见误区:求对数型函数的单调性易忽视定义域.

随堂演练

1. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ 的单调递增区间为 ( )

A. $(-\infty,+\infty)$

B. $(0,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$

D. $(0,1)$

2. 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+3)$ 的单调递增区间是 ( )

A. $(-1,1]$

B. $(-\infty,1)$

C. $[1,3)$

D. $(1,+\infty)$

3. 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $[2,+\infty)$

4. 函数 $f(x)=\log_3(x^2+2x+4)$ 的值域为________.

4.4.3　不同函数增长的差异

【学习目标】1. 了解常用的描述现实世界中不同增长规律的函数模型.　2. 了解直线上升、指数爆炸、对数增长等增长含义.　3. 能根据具体问题选择合适的函数模型.

一、几个函数模型增长差异的比较

问题 1　结合之前所学,请同学们自行阅读课本 136 页~138 页,同位之间可以相互讨论,5 分钟后检查讨论结果.

问题 2　把一次函数 $y=2x$,对数函数 $y=\lg x$ 和指数函数 $y=2^x$ 的图象画到同一平面直角坐标系下,并比较它们的增长差异.

【知识梳理】

三种常见函数模型的增长差异

函数性质	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$y=kx(k>0)$
在$(0,+\infty)$上的增减性			
图象的变化	随 x 的增大逐渐变"陡"	随 x 的增大逐渐趋于稳定	增长速度不变
形象描述	指数爆炸	对数增长	直线上升
增长速度	$y=a^x(a>1)$的增长速度最终都会大大超过________的增长速度；总存在一个 x_0，当 $x>x_0$时，恒有________		
增长结果	存在一个 x_0，当 $x>x_0$时，有________		

例 1 (1)下列函数中，增长速度最快的是 ( )

A. $y=2\ 021^x$　　B. $y=x^{2\ 021}$

C. $y=\log_{2\ 021}x$　　D. $y=2\ 021x$

(2)三个变量 y_1,y_2,y_3随着变量 x 的变化情况如表：

x	1	3	5	7	9	11
y_1	5	135	625	1 715	3 635	6 655
y_2	5	29	245	2 189	19 685	177 149
y_3	5	6.10	6.61	6.95	7.20	7.40

则与 x 呈对数型函数、指数型函数、幂函数型函数变化的变量依次是 ( )

A. y_1,y_2,y_3　　B. y_2,y_1,y_3

C. y_3,y_2,y_1　　D. y_3,y_1,y_2

反思感悟 常见的函数模型及增长特点

(1)线性函数模型：线性函数模型 $y=kx+b(k>0)$的增长特点是直线上升，其增长速度不变.

(2)指数函数模型：指数函数模型 $y=a^x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越快，即增长速度急剧加快，形象地称为"指数爆炸".

(3)对数函数模型：对数函数模型 $y=\log_a x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越慢，即增长速度平缓.

(4)幂函数模型：幂函数 $y=x^a(a>0)$的增长速度介于指数增长和对数增长之间.

跟踪训练 1

下列函数中，增长速度越来越慢的是 ( )

A. $y=6^x$　　B. $y=\log_6 x$

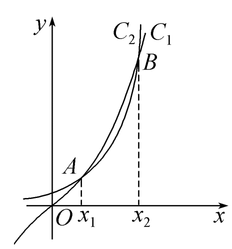
C. $y=x^2$　　D. $y=6x$

二、函数增长速度的比较

例 2 函数 $f(x)=2^x$ 和 $g(x)=x^3$的图象如图所示. 设两函数的图象交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$.

(1)请指出图中曲线 C_1,C_2分别对应的函数；

(2)结合函数图象，判断 $f(6)$，$g(6)$，$f(2\ 021)$，$g(2\ 021)$的大小.



跟踪训练 2

以下四种说法中，正确的是 ( )

A. 幂函数的增长速度比一次函数的增长速度快

B. 对任意的 $x>0$，$x^n>\log_a x$

C. 对任意的 $x>0$，$a^x>\log_a x$

D. 不一定存在 x_0，当 $x>x_0$时，总有 $a^x>x^n>\log_a x$

三、函数模型的选择

问题 3 现在你能对你资金的三种投资方案做出选择了吗？

方案一：每天回报 40 元；方案二：第一天回报 10 元，以后每天比前一天多回报 10 元；方案三：第一天回报 0.4 元，以后每天的回报比前一天翻一番.

例 3 某汽车制造商在 2021 年年初公告，公司计划 2021 年的生产目标为 43 万辆. 已知该公司近三年的汽车生产量如表所示：

年份/年	2018	2019	2020
年产量/万辆	8	18	30

如果我们分别将 2018，2019，2020，2021 年定义为第一、二、三、四年. 现在有两个函数模型：二次函数模型 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，指数型函数模型 $g(x)=a\cdot b^x+c(a\neq0,b>0,b\neq1)$，哪个模型能更好地反映该公司年产量 y 与年份 x 的关系？

反思感悟 建立函数模型应遵循的三个原则

(1) 简化原则：建立函数模型，原型一定要简化，抓主要因素、主要变量，尽量建立较低阶、较简便的模型.

(2) 可推演原则：建立模型，一定要有意义，既能作理论分析，又能计算、推理，且能得出正确结论，

(3) 反映性原则：建立模型，应与原型具有“相似性”，所得模型的解应具有说明问题的功能，能回到具体问题中解决问题.

跟踪训练 3

据报道，某淡水湖的湖水在 50 年内减少了 10%，若按此规律，设 2021 年的湖水量为 m，从 2021 年起，经过 x 年后湖水量 y 与 x 的函数关系为________.

【课堂小结】

1. 知识清单：三种函数模型：线性函数增长模型、指数型函数增长模型、对数型函数增长模型.
2. 方法归纳：转化法.
3. 常见误区：不理解三种函数增长的差异.

随堂演练

1. 下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 上增长速度最快的是 ( )

A. $y=x^2$　　B. $y=\log_2x$

C. $y=2x$　　D. $y=2^x$

2. 在一次数学试验中，采集到如下一组数据：

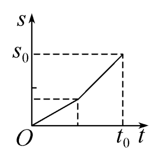
x	−2.0	−1.0	0	1.00	2.00	3.00
y	0.24	0.51	1	2.02	3.98	8.02

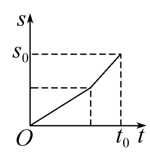
则 x,y 的函数关系与下列哪类函数最接近？(其中 a,b 为待定系数) ( )

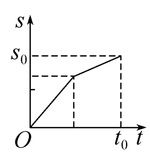
A. $y=a+bx$　　B. $y=a+b^x$

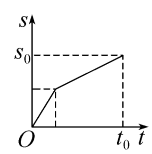
C. $y=ax^2+b$　　D. $y=a+\frac{b}{x}$

3. 甲从 A 地到 B 地，途中前一半路程的行驶速度是 v_1，后一半路程的行驶速度是 $v_2(v_1<v_2)$，则下图中能正确反映甲从 A 地到 B 地走过的路程 s 与时间 t 的关系的是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 现测得 (x,y) 的两组对应值分别为 $(1,2)$，$(2,5)$，现有两个待选模型：甲：$y=x^2+1$，乙：$y=3x-1$，若又测得 (x,y) 的一组对应值为 $(3,10.2)$，则应选用________作为函数模型.

提醒：完成作业　第四章　4.4　4.4.3

4.5　函数的应用(二)

4.5.1　函数的零点与方程的解

【学习目标】1. 了解函数的零点、方程的解与图象交点三者之间的联系.　2. 会借助函数零点存在定理判断函数的零点所在的大致区间.　3. 能借助函数单调性及图象判断零点个数.

一、函数的零点与方程的解

问题 1　观察下列三组方程与函数:

方程	函数
$x^2-2x-3=0$	$y=x^2-2x-3$
$x^2-2x+1=0$	$y=x^2-2x+1$
$x^2-2x+3=0$	$y=x^2-2x+3$

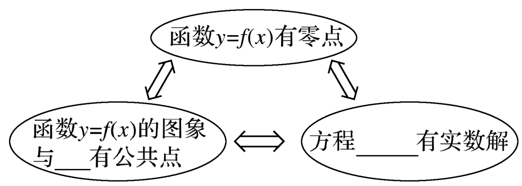
利用函数图象探究方程的根与函数图象与 x 轴的交点之间的关系.

问题 2　问题 1 中的函数的零点是函数图象与 x 轴的交点坐标吗?

【知识梳理】

1. 概念:对于一般函数 $y=f(x)$,我们把使________的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

2. 函数的零点、函数的图象与 x 轴的交点、对应方程的解的关系:



例 1　(多选)方程 $(x^2-4)\sqrt{2x-1}=0$ 的解可以是　　(　　)

A. $x=-2$　　B. $x=-\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=2$

反思感悟　探究函数零点的两种求法

(1)代数法:求方程 $f(x)=0$ 的实数根,若存在实数根,则函数存在零点,否则函数不存在零点.

(2)几何法:与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来,图象与 x 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

跟踪训练 1

求下列函数的零点:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, x\leqslant 0,\\ -2+\ln x, x>0;\end{cases}$

(2) $f(x)=(\lg x)^2-\lg x$.

二、函数零点存在定理

问题 3　探究函数 $y=x^2+4x-5$ 的零点所在区间及零点所在区间的端点对应函数值的正负情况，并说明函数图象在零点附近有什么变化规律.

【知识梳理】

函数零点存在定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象是一条________的曲线，且有________，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得________，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

例 2　（多选）若函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上连续不断，且满足 $f(0)<0$，$f(1)>0$，$f(2)>0$，则下列说法错误的是　(　　)

A. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上一定有零点，在区间 $(1,2)$ 上一定没有零点

B. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上一定没有零点，在区间 $(1,2)$ 上一定有零点

C. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上一定有零点，在区间 $(1,2)$ 上可能有零点

D. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上可能有零点，在区间 $(1,2)$ 上一定有零点

反思感悟　确定函数 $f(x)$ 的零点所在区间的常用方法

(1)解方程法：当对应方程 $f(x)=0$ 易解时，可先解方程，再看求得的根是否落在给定区间上.

(2)利用函数零点存在定理：首先看函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是否连续，再看是否有 $f(a)\cdot f(b)<0$. 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点.

(3)数形结合法：通过画函数图象，观察图象与 x 轴在给定区间上是否有交点来判断.

跟踪训练 2

函数 $f(x)=\lg x-\dfrac{1}{x}$ 的零点所在的区间是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,10)$

C. $(10,100)$　　D. $(100,+\infty)$

三、函数零点个数的问题

问题 4　你现在能说出问题 1 中的三个函数的零点的个数吗？是怎么判断的？

例 3　判断下列函数的零点的个数.

(1) $f(x)=x^2-\frac{3}{4}x+\frac{5}{8}$；

(2) $f(x)=\ln x+x^2-3$.

反思感悟　判断函数零点个数的四种常用方法

(1)利用方程根，转化为解方程，有几个不同的实数根就有几个零点.

(2)画出函数 $y=f(x)$ 的图象，判断它与 x 轴的交点个数，从而判断零点的个数.

(3)结合单调性，利用函数零点存在定理，可判断 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内零点的个数.

(4)转化成两个函数图象的交点个数问题.

跟踪训练 3

已知函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4,0<x\leqslant1,\\x^2-4x+3,x>1\end{cases}$ 和函数 $g(x)=\log_2x$，则函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的零点个数是________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)函数的零点定义.

(2)函数的零点与方程的解的关系.

(3)函数零点存在定理.

(4)函数零点个数的判断.

2. 方法归纳：定理法、方程法、数形结合法.

3. 常见误区：零点理解成点；零点个数问题不能转化成函数图象交点个数问题.

随堂演练

1. 函数 $f(x)=\log_2x$ 的零点是　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 函数 $f(x)=2^x-\frac{1}{x}$ 的零点所在的区间是(　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

3. 对于函数 $f(x)$，若 $f(-1)\cdot f(3)<0$，则(　　)

A. 方程 $f(x)=0$ 一定有一实数解

B. 方程 $f(x)=0$ 一定无实数解

C. 方程 $f(x)=0$ 一定有两实根

D. 方程 $f(x)=0$ 可能无实数解

4. 函数 $f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$ 的零点有________个.

提醒：完成作业　第四章　4.5　4.5.1

习题课　函数的零点与方程的解

【学习目标】 1. 进一步应用函数零点存在定理，已知零点(方程的解)的情况求参数范围.　2. 掌握一元二次方程的根的分布情况.

一、根据零点情况求参数范围

例 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a,x<0,\\\log_a(x+1)+1,x\geqslant0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

跟踪训练 1

若方程 $x\lg(x+2)=1$ 的实根在区间 $(k,k+1)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上，则 k 等于　　（　　）

A. -2　　B. 1

C. -2 或 1　　D. 0

二、一元二次方程的根的分布问题

例 2　已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+2m+6=0$.

(1)若方程有两个实根，且一个比 2 大，一个比 2 小，求实数 m 的取值范围；

(2)若方程有两个实根 α,β，且满足 $0<\alpha<1<\beta<4$，求实数 m 的取值范围；

(3)若方程至少有一个正根，求实数 m 的取值范围.

反思感悟　一元二次方程根的分布问题转化为二次函数的图象与 x 轴交点的情况，先将函数草图上下平移，确定根的个数，用判别式限制，再左右平移，确定对称轴有无超过区间，或是根据根的正负问题，用根与系数的关系进行限制.

跟踪训练 2

已知函数 $f(x)=(\log_2 x)^2+4\log_2 x+m$，$x\in\left[\frac{1}{8},4\right]$，$m$ 为常数.

(1)若函数 $f(x)$ 存在大于 1 的零点，求实数 m 的取值范围；

(2)设函数 $f(x)$ 有两个互异的零点 α,β，求实数 m 的取值范围，并求 $\alpha\cdot\beta$ 的值.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)根据零点情况求参数的取值范围.

(2)一元二次方程根的分布.

2. 方法归纳：判别式法、数形结合法.

3. 常见误区：不能把函数、方程问题相互灵活转化.

随堂演练

1. 若函数 $f(x)=x^2-2x+a$ 在 $(0,2)$ 上有两个零点，则 a 的取值范围为　　（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,1)$

2. 已知函数 $f(x)=mx+1$ 的零点在区间 $(1,2)$ 内，则 m 的取值范围是　　（　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

B. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

D. $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

3. 函数 $f(x)=3^x-\dfrac{4}{x}-a$ 的一个零点在区间(1,2)内,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. (-2,7) B. (-1,6)

C. (-1,7) D. (-2,6)

4. 若函数 $f(x)=3x^2-5x+a$ 的一个零点在区间(-2,0)内,另一个零点在区间(1,3)内,则实数 a 的取值范围是________.

4.5.2 用二分法求方程的近似解

【学习目标】 1. 了解二分法的原理及其适用条件. 2. 掌握二分法的实施步骤. 3. 体会二分法中蕴含的逐步逼近与程序化思想.

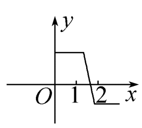
一、二分法的概念

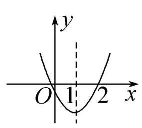
问题 1 有 16 个大小相同,颜色相同的金币,其中有 15 个金币是真的,有一个质量稍轻的是假的. 用天平称几次一定可以找出这个稍轻的假币?

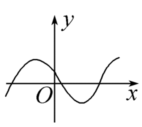
【知识梳理】

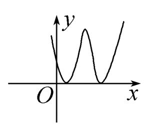
二分法:对于在区间[a,b]上图象连续不断且________的函数 $y=f(x)$,通过不断地把它的零点所在区间________,使所得区间的两个端点________,进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

例 1 (1)(多选)下列函数图象与 x 轴均有交点,能用二分法求函数零点近似值的是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

(2)已知 $f(x)=x^2+6x+c$ 有零点,但不能用二分法求出,则 c 的值是 ( )

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

反思感悟 运用二分法求函数的零点应具备的条件

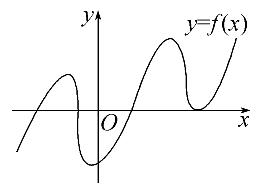
(1)函数图象在零点附近连续不断.

(2)在该零点左右两侧的函数值异号.

只有满足上述两个条件,才可用二分法求函数零点.

跟踪训练 1

已知函数 $f(x)$ 的图象如图,其中零点的个数与可以用二分法求解的个数分别为 ( )



A. 4,4 B. 3,4 C. 5,4 D. 4,3

二、用二分法求函数零点的近似解

问题 2 按上述思路,你能想办法求函数 $f(x)=x^3-3$ 的近似解吗?

【知识梳理】

给定精确度 ε,用二分法求函数 $y=f(x)$ 零点 x_0 的近似值的步骤

1. 确定零点 x_0 的初始区间[a,b],验证________.
2. 求区间 (a,b) 的中点________.
3. 计算 $f(c)$,并进一步确定零点所在的区间:

(1)若 $f(c)=0$(此时 $x_0=c$),则________就是函数的零点;

(2)若 $f(a)\cdot f(c)<0$(此时 $x_0\in$________),则令 $b=c$;

(3)若 $f(c)\cdot f(b)<0$(此时 $x_0\in$________),则令 $a=c$.

(4)判断是否达到精确度 ε：若 $|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值 a（或 b）；否则重复步骤(2)～(4).

以上步骤可简化为：定区间，找中点，中值计算两边看；同号去，异号算，零点落在异号间；周而复始怎么办，精确度上来判断.

例 2 （多选）用二分法求函数 $f(x)=5^x+7x-2$ 的一个零点，其参考数据如下：

x	0.062 5	0.093 75	0.125	0.156 25	0.187 5
$f(x)$	−0.456 7	−0.180 9	0.097 8	0.379 7	0.664 7

根据上述数据，可得 $f(x)=5^x+7x-2$ 的一个零点近似值（精确度 0.05）为 （　　）

A. 0.625　　B. 0.093 75

C. 0.125　　D. 0.096

反思感悟 二分法求函数零点的关注点

(1)验证零点所在的区间是否符合精确度要求.

(2)区间内的任一点都可以作为零点的近似解，一般取端点作为零点的近似解.

跟踪训练 2

用二分法求方程 $2^x+3x-7=0$ 在区间 $(1,3)$ 内的近似解，取区间的中点为 $x_0=2$，那么下一个有根的区间是________.

三、二分法的实际应用

例 3 某市 A 地到 B 地的电话线路发生故障，这是一条 10 km 长的线路，每隔 50 m 有一根电线杆，如何迅速查出故障所在？

跟踪训练 3

一块电路板的 A、B 之间有 60 个串联的焊接点，知道电路不通的原因是焊口脱落造成的，要想用二分法的思想检测出哪处焊口脱落，至少需要检测 （　　）

A. 4 次　　B. 6 次　　C. 8 次　　D. 30 次

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)二分法的定义.

(2)利用二分法求函数的零点、方程的近似解.

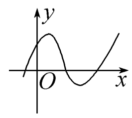
(3)二分法在实际生活中的应用.

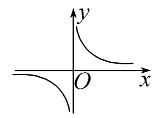
2. 方法归纳：化归、逼近.

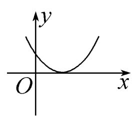
3. 常见误区：二分法并不适用于所有零点，只能求函数的变号零点，且函数图象在零点附近是连续的.

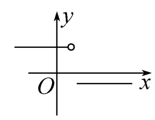
随堂演练

1. 观察下列函数的图象，判断能用二分法求其零点的是 （　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 下列函数中，必须用二分法求其零点的是 （　　）

A. $y=x+7$　　B. $y=5^x-1$

C. $y=\log_3 x$　　D. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x$

3. 用二分法求函数 $f(x)=x^3+5$ 的零点可以取的初始区间是 （　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

4. 若函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 的一个正数零点附近的函数值用二分法逐次计算，参考数据如表：

$f(1)=-2$	$f(1.5)=0.625$
$f(1.25)=-0.984$	$f(1.375)=-0.260$
$f(1.438)=0.165$	$f(1.406\ 5)=-0.052$

那么方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根（精确度0.05）为 （　　）

A. 1.5　　B. 1.375

C. 1.438　　D. 1.25

提醒：完成作业　第四章　4.5　4.5.2

4.5.3 函数模型的应用

【学习目标】1. 能利用已知函数模型求解实际问题. 2. 能根据实际需要构建指数型函数或对数型函数模型解决实际问题.

一、应用已知函数模型解决实际问题

问题1 你能写出几种函数模型?

问题2 应用函数模型解决问题的基本过程是什么?

例1 Logistic 模型是常用数学模型之一,可应用于流行病学领域,有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$(t 的单位:天)的 Logistic 模型:$I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.24(t-53)}}$,其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.9K$ 时,标志着已初步遏制疫情,则 t^* 约为(注:e 为自然对数的底数,$\ln 9\approx 2.2$) ( )

A. 60 B. 62 C. 66 D. 69

跟踪训练1

我们处在一个有声的世界里,不同场合人们对声音的音量会有不同的要求. 音量大小的单位是分贝(dB). 对于一个强度为 I 的声波,其音量的大小 η 可由如下公式计算:$\eta=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$(其中 I_0 是人耳能听到的声音的最低声波强度). 设 $\eta_1=70$ dB 的声音强度为 I_1,$\eta_2=60$ dB 的声音强度为 I_2,则 I_1 是 I_2 的 ( )

A. $\frac{7}{6}$倍 B. 10 倍

C. $10^{\frac{7}{6}}$倍 D. $\ln\frac{7}{6}$倍

二、指数型函数模型

例2 我国是世界上人口最多的国家,1982 年十二大,计划生育被确定为基本国策,实行计划生育,严格控制人口增长,坚持少生优生,这直接关系到人民生活水平的进一步提高,也是造福子孙后代的百年大计.

(1)据统计,1995 年年底,我国人口总数约 12 亿,如果人口的自然年增长率控制在 1%,到 2021 年年底我国人口总数大约为多少亿?(精确到亿)

(2)当前,我国人口发展已经出现转折性变化,2015 年 10 月 26 日至 10 月 29 日召开的党的十八届五中全会决定,坚持计划生育的基本国策,完善人口发展战略,全面实施一对夫妇可生育两个孩子的政策,积极开展应对人口老龄化行动. 这是继 2013 年十八届三中全会决定启动实施"单独二孩"政策之后的又一次人口政策调整. 据统计,2015 年中国人口实际数量大约 14 亿,若实行全面两孩政策后,预计人口年增长率实际可达 1%,那么需要经过多少年我国人口可达 16 亿?

(参考数据:$1.01^{26}\approx 1.2953$,$\lg 2\approx 0.3010$,$\lg 7\approx 0.8451$,$\lg 1.01\approx 0.0043$)

跟踪训练 2

某公司为激励创新，计划逐年加大研发资金投入. 若该公司 2020 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 ( )

(参考数据：lg 1.12≈0.05，lg 1.3≈0.11，lg 2≈0.30)

A. 2023 年　　B. 2024 年

C. 2025 年　　D. 2026 年

三、对数型函数模型

例 3 5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式：$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率 C 取决于信道带宽 W、信道内信号的平均功率 S，信道内部的高斯噪声功率 N 的大小，其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 按照香农公式，若不改变带宽 W，而将信噪 $\frac{S}{N}$ 从 1 000提升至 2 000，则 C 大约增加了 ( )

A. 10%　　B. 30%

C. 50%　　D. 100%

反思感悟 对数型函数应用题的基本类型和求解策略

(1)基本类型：有关对数型函数的应用题一般都会给出函数的解析式，然后根据实际问题求解.

(2)求解策略：首先根据实际情况求出函数解析式中的参数，或给出具体情境，从中提炼出数据，代入解析式求值，然后根据数值回答其实际意义.

跟踪训练 3

20 世纪 30 年代，里克特制定了一种表明地震能量大小的尺度，就是使用测震仪衡量地震能量的等级，地震能量越大，测震仪记录的地震曲线的振幅就越大，这就是我们常说的里氏震级 M，其计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$，其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是标准地震的振幅. 5 级地震给人的震感已经比较明显，7 级地震的最大振幅是 5 级地震最大振幅的 ( )

A. 20 倍　　B. lg 20 倍

C. 100 倍　　D. 1 000 倍

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)应用已知函数模型解决实际问题.

(2)指数型函数模型.

(3)对数型函数模型.

2. 方法归纳：转化法.

3. 常见误区：实际应用题易忘记定义域和结论.

随堂演练

1. 我国古代著名的思想家庄子在《庄子·天下篇》中说：“一尺之锤，日取其半，万世不竭.”用现代语言叙述为：一尺长的木棒，每天取其一半，永远也取不完. 这样，每天剩下的部分都是前一天的一半. 如果把“一尺之锤”看成单位“1”，那么 x 天后剩下的部分 y 与 x 的函数关系式为 ( )

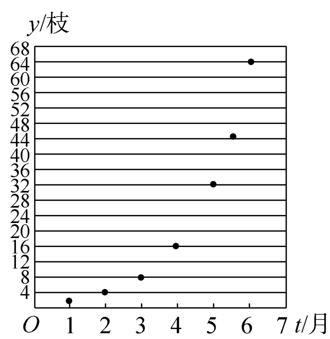
A. $y=\frac{1}{2}x(x\in\mathbf{N}^*)$

B. $y=x^{\frac{1}{2}}(x\in\mathbf{N}^*)$

C. $y=2^x(x\in\mathbf{N}^*)$

D. $y=\frac{1}{2^x}(x\in\mathbf{N}^*)$

2. 下面给出了红豆生长时间 t(月)与枝数 y(枝)的散点图，那么最能拟合诗句“红豆生南国，春来发几枝”所提到的红豆生长时间与枝数的关系的函数模型是 ( )



A. 指数函数：$y=2^t$

B. 对数函数：$y=\log_2 t$

C. 幂函数：$y=t^3$

D. 二次函数：$y=2t^2$

3. 某位股民购进某只股票，在接下来的交易时间内，他的这只股票先经历了 3 次涨停（每次上涨 10%），又经历了 3 次跌停（每次下降 10%），则该股民这只股票的盈亏情况（不考虑其他费用）为（　　）

A. 略有亏损

B. 略有盈利

C. 没有盈利也没有亏损

D. 无法判断盈亏情况

4. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，游回产地产卵. 研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游速可以表示为函数 $v=\frac{1}{2}\log_3\frac{O}{100}$，单位是 m/s，其中 O 表示鱼的耗氧量的单位数. 当一条鱼的耗氧量是 2 700 个单位时，它的游速是________m/s.

提醒：完成作业　第四章　4.5　4.5.3

习题课　函数模型的应用

【学习目标】1. 能自建确定性函数模型解决实际问题.　2. 了解建立拟合函数模型的步骤，并了解检验和调整的必要性.

一、建立函数模型解决实际问题

例 1　某地规划对一片面积为 a 的沙漠进行治理，每年治理面积占上一年底沙漠面积的百分比均为 $x(0<x<1)$. 当治理面积达到这片沙漠面积的一半时，正好用了 10 年时间.

(1) 求 x 的值；

(2) 若今年年初这片沙漠面积为原沙漠面积的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，按照规划至少还需多少年，使剩余沙漠面积至多为原沙漠面积的 $\frac{1}{4}$？

跟踪训练 1

某化工厂生产一种溶液的成品，生产过程的最后工序是过滤溶液中的杂质，过滤初期溶液含杂质为 2%，每经过一次过滤均可使溶液杂质含量减少一半，记过滤次数为 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 时溶液杂质含量为 y.

(1) 分别求出 1 次过滤、2 次过滤以后的溶液杂质含量 y_1，y_2 的值；

(2) 写出 y 与 x 的函数关系式（要求写出定义域）；

(3) 按市场要求，出厂成品杂质含量不能超过 0.02%，问至少经过几次过滤才能使产品达到市场要求？（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

二、实际问题中的函数模型选择问题

例 2　近年来，我国积极参与国际组织，承担国际责任，为国家进步、社会发展、个人成才带来了更多机遇，因此，面临职业选择时，越来越多的青年人选择通过创业、创新的方式实现人生价值. 其中，某位大学生带领其团队自主创业，通过直播带货的方式售卖特色农产品，下面为三年来农产品销售量的统计表：

年份	2017	2018	2019
销售量/万斤	41	55	83

结合国家支持大学生创业政策和农产品市场需求情况，该大学生提出了 2020 年销售 115 万斤

特色农产品的目标，经过创业团队所有队员的共同努力，2020 年实际销售 123 万斤，超额完成预定目标.

(1) 将 2017，2018，2019，2020 年分别定义为第 1 年、第 2 年、第 3 年、第 4 年，现有两个函数模型：二次函数模型为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；幂函数模型为 $g(x)=kx^3+mx+n(k\neq 0)$. 请你通过计算分析确定：选用哪个函数模型能更好地反映该创业团队农产品的年销售量 y 与第 x 年的关系；

(2) 依照目前的形势分析，你能否预测出该创业团队在 2021 年的农产品销售量？

跟踪训练 2

人类已经进入大数据时代. 目前，数据量已经从 TB(1 TB = 1 024 GB) 级别跃升到 PB(1 PB = 1 024 TB)，EB (1 EB = 1 024 PB) 乃至 ZB(1 ZB = 1 024 EB) 级别. 国际数据公司 (IDC) 的研究结果表明，全球产生的数据量为

年份	2008	2009	2010	2011	…
x(单位：年)	0	1	2	3	…
数据量(单位：ZB)	0.49	0.8	1.2	1.82	…

为了较好地描述 2008 年起全球产生的数据量与时间 x(单位：年) 的关系，根据上述数据信息，选择函数 $f(x)=kx+b$ 和 $g(x)=ma^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 进行拟合研究.

(1) 国际数据公司 (IDC) 预测 2020 年全球数据量将达到 80.0 ZB，你认为依据哪一个函数拟合更为合理？

(2) 设我国 2020 年的数据量为 c ZB，根据拟合函数，请你估计我国的数据量达到 $100c$ ZB 约需要多少年？

(参考数据：$1.53^{10}\approx 70.29$，$1.53^{11}\approx 107.55$，$1.53^{12}\approx 164.55$，$1.53^{13}\approx 251.76$)

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1) 建立函数模型解决实际问题.

(2) 实际问题中的函数模型选择问题.

2. 方法归纳：转化法.

3. 常见误区：对函数拟合效果的分析不能做出正确选择.

随堂演练

1.某种植物生长发育的数量 y 与时间 x 的关系如下表：

x	1	2	3	…
y	1	3	8	…

则下面的函数关系式中，拟合效果最好的是 (　　)

A. $y=2x-1$　　B. $y=x^2-1$

C. $y=2^x-1$　　D. $y=1.5x^2-2.5x+2$

2.若镭经过 100 年后剩留原来质量的 95.76%，设质量为 1 的镭经过 x 年后剩留量为 y，则 x 与 y 的函数关系是 (　　)

A. $y=0.957\,6^{\frac{x}{100}}$　　B. $y=0.957\,6^{100x}$

C. $y=\left(\frac{0.957\,6}{100}\right)^x$　　D. $y=1-0.042\,4^{\frac{x}{100}}$

3.衣柜里的樟脑丸，随着时间会挥发而体积缩小，刚放进的新丸体积为 a，经过 t 天后体积 V 与天数 t 的关系式为 $V=a\cdot e^{-kt}$. 已知新丸经过 50 天后，体积变为 $\frac{4}{9}a$. 若一个新丸体积变为 $\frac{8}{27}a$，则需经过的天数为________.

章末复习课

知识网络

- 指数与指数函数
  - 指数
    - 分数指数幂及根式
    - 无理数指数幂
    - 运算性质
  - 指数函数
    - 定义
    - 图象与性质
    - 应用
- 互为反函数
- 对数与对数函数
  - 对数函数
    - 定义
    - 图象与性质
    - 应用
  - 对数
    - 定义
    - 运算性质

一、指数、对数的运算

1. 指数、对数的运算主要考查对数与指数的互化，对数、指数的运算性质以及换底公式等，会利用运算性质进行化简、计算、证明.
2. 掌握基本运算性质，重点提升数学运算素养.

例 1 计算：(1) $1-3^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{7}-\sqrt{103}\right)^{0}$；

(2) $\log_2 0.25+\ln\sqrt{e}+2^{4\cdot\log_2 3}+\lg 4+2\lg 5-\sqrt[4]{(-2)^4}$.

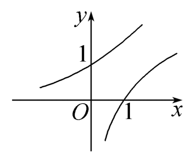
跟踪训练 1

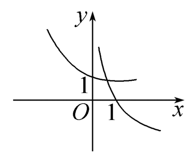
计算：$(2\,018)^0+3\times\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+(\lg 4+\lg 25)$ 的值是________.

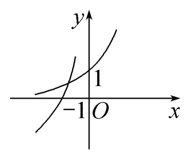
二、指数、对数函数的图象及应用

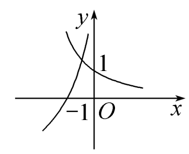
1. 指数函数、对数函数的图象及应用有两个方面：一是已知函数解析式求作函数图象，即“知式求图”；二是判断方程的根的个数时，通常不具体解方程，而是转化为判断指数函数、对数函数等图象的交点个数问题.
2. 掌握指数函数、对数函数图象的作法以及简单的图象平移翻折变换，提升直观想象和逻辑推理素养.

例 2 已知 $a>0$，且 $a\neq1$，则函数 $f(x)=a^x$ 和 $g(x)=\log_a\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ 的图象只可能是 ( )

A. 

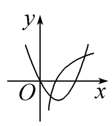
B. 

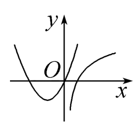
C. 

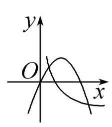
D. 

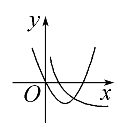
跟踪训练 2

对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与二次函数 $y=(a-1)x^2-x$ 在同一坐标系内的图象可能是 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

三、指数、对数性质的应用

1. 以函数的性质为依托，结合运算考查函数的图象性质，以及利用性质进行大小比较、方程和不等式求解等. 在解含对数式的方程或不等式时，不能忘记对数中真数大于 0，以免出现增根或扩大范围.
2. 掌握指数函数、对数函数的图象及性质，重点提升数学运算和逻辑推理素养.

例 3 (1) 设 $a=\log_2\pi$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\pi$，$c=\pi^{-2}$，则 ( )

A. $a>b>c$ B. $b>a>c$

C. $a>c>b$ D. $c>b>a$

(2)已知 $a>0, a\neq 1$ 且 $\log_a 3>\log_a 2$,若函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,3a]$ 上的最大值与最小值之差为 1.

①求 a 的值;

②若 $1\leqslant x\leqslant 3$,求函数 $y=(\log_a x)^2-\log_a\sqrt{x}+2$ 的值域.

跟踪训练 3

若 $0<x<y<1$,则 ( )

A. $3^y<3^x$ B. $\log_x 3<\log_y 3$

C. $\log_4 x<\log_4 y$ D. $\left(\frac{1}{4}\right)^x<\left(\frac{1}{4}\right)^y$

四、函数的零点

1. 函数的零点主要考查零点个数以及零点所在区间,主要利用了转化思想,把零点问题转化成函数与 x 轴交点以及两函数图象交点问题.

2. 掌握函数零点存在定理及转化思想,提升逻辑推理和直观想象素养.

例 4 (1)设函数 $f(x)=\log_2 x+2^x-3$,则函数 $f(x)$ 的零点所在的区间为 ( )

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$

C. $(2,3)$ D. $(3,4)$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+a, x\leqslant 0, \\ 3x-1, x>0 \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$,若函数在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)$ B. $(-\infty,1)$

C. $(-1,0)$ D. $[-1,0)$

跟踪训练 4

(1)方程 $\frac{x^3}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的根 x_0 所在的区间为 ( )

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$

C. $(2,3)$ D. $(3,4)$

(2)设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,则方程 $2^x-2[x]-1=0$ 的根有 ( )

A. 4 个 B. 3 个

C. 2 个 D. 1 个

随堂演练

1. 下列指数式与对数式互化不正确的一组是 ( )

A. $e^0=1$ 与 $\ln 1=0$

B. $8^{\frac{1}{3}}=2$ 与 $\log_8 2=\frac{1}{3}$

C. $\log_3 3=1$ 与 $3^1=3$

D. $\lg 100=2$ 与 $100^{\frac{1}{2}}=10$

2. 设 $a=0.6^{0.4}, b=0.4^{0.6}, c=0.4^{0.4}$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<b<c$ B. $b<c<a$

C. $c<a<b$ D. $c<b<a$

3. 函数 $f(x)=\frac{9}{x}-\lg x$ 的零点所在的区间是 ( )

A. $(8,9)$ B. $(7,8)$

C. $(9,10)$ D. $(10,11)$

4. 若 $\log_a\frac{2}{3}<1(a>0$,且 $a\neq 1)$,则 a 的取值范围为________.