CHAPTER 5
第五章

三角函数

5.1 任意角和弧度制

5.1.1 任意角

【学习目标】1. 了解任意角的概念,区分正角、负角与零角. 2. 了解象限角的概念,理解并掌握终边相同的角的概念,能写出终边相同的角所组成的集合. 3. 利用象限角和终边相同角的概念解决简单的问题.

一、任意角的概念

问题 1 在初中是如何定义角的?角的范围是多少?

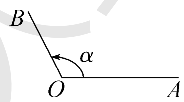
【知识梳理】

1. 角的概念

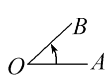
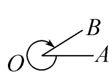
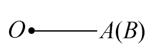
角可以看成平面内一条________绕着它的端点________所成的________.

2. 角的表示

如图所示,角 α 可记为“α”“$\angle\alpha$”或“$\angle AOB$”,始边:________,终边:________,顶点:________.



3. 角的分类

名称	定义	图示
正角	一条射线绕其端点按________方向旋转形成的角	
负角	一条射线绕其端点按________方向旋转形成的角	
零角	一条射线________做任何旋转形成的角	

4. 任意角

我们把角的概念推广到了________,包括________、________和________.

5. 相反角

我们把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角,角 α 的相反角记为________.

例 1 若手表时针走过 4 小时,则时针转过的角度为 ( )

A. 120° B. −120° C. −60° D. 60°

反思感悟 正确理解锐角、直角、钝角、平角、周角等概念,弄清角的始边与终边及旋转方向与大小.逆时针旋转形成一个正角,顺时针旋转形成一个负角,正角与负角是表示具有相反意义的旋转量,它的正负规定纯属习惯,就好像正数和负数的规定一样.

跟踪训练 1

经过 2 个小时,钟表的时针和分针转过的角度分别是 ( )

A. 60°,720° B. −60°,−720°

C. −30°,−360° D. −60°,720°

二、象限角

问题 2 现在,我们把角的概念推广到了任意角,如何更形象地表示一个角?

例 2　在①160°;②480°;③−960°;④1 530°这四个角中,属于第二象限角的是　(　　)

A. ①　　B. ①②

C. ①②③　　D. ①②③④

反思感悟　正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念的关系,需要掌握判断结论正确与否的技巧,判断结论正确需要证明,而判断结论不正确只需举一个反例即可.

跟踪训练 2

(多选)下列叙述不正确的是　(　　)

A. 三角形的内角是第一象限角或第二象限角

B. 钝角是第二象限角

C. 第二象限角比第一象限角大

D. 小于 180°的角是钝角、直角或锐角

三、终边相同的角

问题 3　给定一个角,它的终边是否唯一? 若两角的终边相同,那么这两个角相等吗?

【知识梳理】

终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

例 3　已知 $\alpha=-1\ 845°$,在与 α 终边相同的角中,求满足下列条件的角.

(1)最小的正角;

(2)最大的负角;

(3)−360°~720°之间的角.

反思感悟　终边相同的角的表示

(1)终边相同的角都可以表示成 $\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$的形式.

(2)终边相同的角相差 360°的整数倍.

跟踪训练 3

(1)下列角的终边与 −53°角的终边在同一直线上的是　(　　)

A. −37°　　B. 53°

C. 233°　　D. 127°

(2)若角 2α 与 240°角的终边相同,则 α 等于　(　　)

A. $120°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$

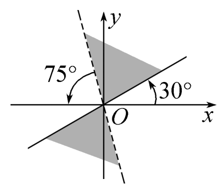
B. $120°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$

C. $240°+k\cdot 360°k\in\mathbf{Z}$

D. $240°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$

四、区域角以及终边在已知直线上的角的表示

例 4　已知角 α 的终边在图中阴影部分内,试指出角 α 的取值范围.



反思感悟　(1)象限角的判定方法

①根据图象判定. 利用图象实际操作时,依据是终边相同的角的思想,因为 0°~360°之间的角与坐标系中的射线可建立一一对应的关系.

②将角转化到 0°~360°范围内,在平面直角坐标系内,在 0°~360°之间没有两个角终边是相同的.

(2)表示区域角的三个步骤

第一步:先按逆时针的方向找到区域的起始和终止边界.

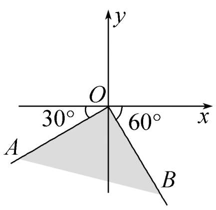
第二步:按由小到大分别标出起始和终止边界对应的−360°~360°范围内的角 α 和 β,写出最简

区间$\{x|\alpha<x<\beta\}$,其中$\beta-\alpha<360°$.

第三步:起始、终止边界对应角 α,β 再加上 $360°$的整数倍,即得区域角集合.

跟踪训练 4

如图所示.



(1)分别写出终边落在 OA,OB 位置上的角的集合;

(2)写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)正角、负角、零角的概念.

(2)终边相同的角的表示.

(3)象限角、区域角的表示.

2. 方法归纳:数形结合、分类讨论.

3. 常见误区:锐角与小于 $90°$ 的角的区别,终边相同的角的表示中漏掉 $k\in\mathbf{Z}$.

随堂演练

1. “α 是锐角”是“α 是第一象限角”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. $2\,021°$是 (　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

3. 与 $-460°$角终边相同的角可以表示成 (　　)

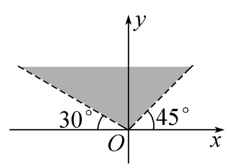
A. $460°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

B. $100°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

C. $260°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

D. $-260°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

4. 已知角 α 的终边在如图阴影表示的范围内(不包含边界),那么角 α 的集合是________________.



提醒:完成作业　第五章　5.1　5.1.1

5.1.2　弧度制

【学习目标】1. 了解弧度制的概念,能进行弧度与角度的相互转化. 2. 掌握弧度制下的扇形的弧长和面积公式.

一、弧度制的概念

问题 1　我们上节课所学习的角度制能否与实数建立一一对应的关系?

问题 2　提到弧度,你能想到什么?

【知识梳理】

1. 弧度制

我们规定:长度等于________长的________所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

2. 弧度数的计算

在半径为 r 的圆中,弧长为 l 的弧所对的圆心角为 α rad,那么 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$.

3. 一般地,正角的弧度数是一个________,负角

的弧度数是一个________,零角的弧度数是________.

例 1　下列各命题中,真命题是　　(　　)

A. 1 弧度就是 1°的圆心角所对的弧

B. 1 弧度是长度等于半径的弧

C. 1 弧度是 1°的弧与 1°的角之和

D. 1 弧度是长度等于半径的弧所对的圆心角的大小

反思感悟　(1)圆心角 α 与所对应的弧长和半径的比值是唯一确定的;

(2)任意角的弧度数与实数是一一对应的关系.

跟踪训练 1

下列说法正确的是(　　)

A. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于半径

B. 大圆中 1 弧度的圆心角比小圆中 1 弧度的圆心角大

C. 所有圆心角为 1 弧度的角所对的弧长都相等

D. 用弧度表示的角都是正角

二、角度制与弧度制的相互转化

问题 3　根据公式 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$,你能得出圆周角的弧度数吗?

【知识梳理】

角度与弧度的互化

角度化弧度	弧度化角度
$360°=$________rad	2π rad$=$________
$180°=$________rad	π rad$=$________
$1°=\dfrac{\pi}{180}$ rad$\approx 0.017\ 45$ rad	1 rad$=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$
度数 $\times\dfrac{\pi}{180}=$弧度数	弧度数 $\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°=$度数

例 2　把下列角度化成弧度或弧度化成角度:

(1)$72°$;

(2)$-300°$;

(3)2;

(4)$-\dfrac{2\pi}{9}$.

反思感悟　角度与弧度互化技巧

在进行角度与弧度的换算时,抓住关系式 π rad$=180°$是关键,由它可以得到度数 $\times\dfrac{\pi}{180}=$弧度数,弧度数 $\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°=$度数.一般情况下,省略弧度单位 rad.

跟踪训练 2

已知 $\alpha=15°$,$\beta=\dfrac{\pi}{10}$,$\gamma=1$,$\theta=105°$,$\varphi=\dfrac{7\pi}{12}$,试比较 α、β、γ、θ、φ 的大小.

三、利用弧度表示角

例 3　将$-1\ 125°$写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式,其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$,并判断它是第几象限角.

反思感悟　用弧度制表示终边相同的角的两个关注点

(1)用弧度制表示终边相同的角 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$时,其中 $2k\pi$ 是 π 的偶数倍,而不是整数倍.

(2)注意角度制与弧度制不能混用.

跟踪训练 3

(1)用弧度制表示与 150°角终边相同的角的集合为　　(　　)

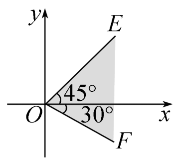
A. $\left\{\beta \middle| \beta=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{\beta \middle| \beta=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{\beta \middle| \beta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{\beta \middle| \beta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合为(用弧度制表示)____________.



四、弧度制下的扇形的弧长与面积公式

问题 4 我们初中所学扇形的弧长和面积公式是什么?

【知识梳理】

设扇形的半径为 R,弧长为 l,$\alpha(0<\alpha<2\pi)$为其圆心角,则

(1)弧长公式:$l=$________.

(2)扇形面积公式:$S=$________$=$________.

例 4 已知扇形的周长为 10 cm,面积为 4 cm^2,求扇形圆心角的弧度数.

反思感悟 扇形的弧长和面积的求解策略

(1)记公式:弧度制下扇形的面积公式是 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$(其中 l 是扇形的弧长,R 是扇形的半径,α 是扇形圆心角的弧度数,$0<\alpha<2\pi$).

(2)找关键:涉及扇形的半径、周长、弧长、圆心角、面积等的计算问题,关键是分析题目中已知哪些量、求哪些量,然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

跟踪训练 4

已知扇形的半径为 10 cm,圆心角为 60°,求扇形的弧长和面积.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)弧度制的概念.

(2)弧度与角度的相互转化.

(3)掌握特殊角的度数与弧度数的对应关系.

(4)扇形的弧长与面积的计算.

2. 方法归纳:由特殊到一般、数学运算.

3. 常见误区:弧度与角度混用.

随堂演练

1. (多选)下列说法中,正确的是 ( )

A. 半圆所对的圆心角是 π rad

B. 周角的大小等于 2π

C. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于该圆的半径

D. 长度等于半径的弦所对的圆心角的大小是 1 弧度

2. 若 $\alpha=-2$ rad,则 α 的终边在 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 时钟经过一小时,时针转过了 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ rad　　B. $-\frac{\pi}{6}$ rad

C. $\frac{\pi}{12}$ rad　　D. $-\frac{\pi}{12}$ rad

4. 周长为 9,圆心角为 1 rad 的扇形面积为________.

提醒:完成作业　第五章　5.1　5.1 .2

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念

【学习目标】1. 借助单位圆理解并掌握任意角的三角函数的定义. 2. 掌握利用诱导公式一求给定角的三角函数值并能确定函数值的符号.

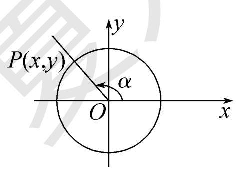
一、三角函数的概念

问题 1 初中我们学习过锐角的三角函数，正弦、余弦和正切，这三个三角函数分别是怎样规定的?

问题 2 之前学习了任意角，我们也把任意角放到了平面直角坐标系中，那么角的终边和单位圆是否有交点? 交点唯一吗?

【知识梳理】

任意角的三角函数的定义

条件	如图，设 α 是一个任意角，$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$	
定义	正弦	把点 P 的__________叫做 α 的正弦函数，记作 $\sin\alpha$，即 $y=$________
	余弦	把点 P 的____________叫做 α 的余弦函数，记作 $\cos\alpha$，即 $x=$________

续表

定义	正切	把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\frac{y}{x}=$____________
	三角函数	正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 余弦函数 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$ 正切函数 $y=\tan x, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

例 1 求 $\frac{2\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值.

反思感悟 利用三角函数的定义求一个角的三角函数值有以下几种情况：

(1)若已知角，则只需确定出该角的终边与单位圆的交点坐标，即可求出各三角函数值.

(2)若已知角 α 终边上一点 $P(x,y)(x\neq0)$ 是单位圆上一点，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(3)若已知角 α 终边上一点 $P(x,y)(x\neq0)$ 不是单位圆上一点，则先求 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，再求 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(4)若已知角 α 终边上的点的坐标含参数，则需进行分类讨论.

跟踪训练 1

(1)(多选)若角 α 的终边经过点 $P(x,-3)$ 且 $\sin\alpha=-\frac{3}{10}\sqrt{10}$,则 x 的值为 ( )

A. $-\sqrt{3}$ B. -1 C. 1 D. $\sqrt{3}$

(2)在(1)中,将"$\sin\alpha=-\frac{3}{10}\sqrt{10}$"改为"$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$",求 x 的值.

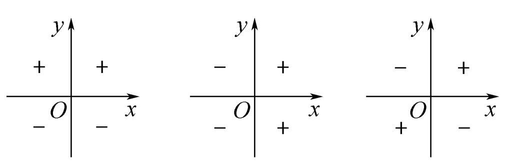
二、正弦、余弦、正切函数值在各个象限内的符号

问题 3 根据三角函数的定义,大家大胆猜测一下三角函数值在各个象限内的符号.

【知识梳理】

正弦、余弦、正切函数值在各象限内的符号

1. 图示:



sin α　　cos α　　tan α

2. 口诀:"一全正,二正弦,三正切,四余弦".

例 2 (1)若 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$,且 $\frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$,则角 α 是 ( )

A. 第一象限角 B. 第二象限角

C. 第三象限角 D. 第四象限角

(2)(多选)下列选项中,符号为负的是 ( )

A. $\sin(-100°)$ B. $\cos(-220°)$

C. $\tan 10$ D. $\cos\pi$

反思感悟 判断三角函数值符号的两个步骤

(1)定象限:确定角 α 所在的象限.

(2)定符号:利用三角函数值的符号规律,即"一全正,二正弦,三正切,四余弦"来判断.

跟踪训练 2

已知点 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限,则角 α 的终边在 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

三、公式一

问题 4 终边相同的角的三角函数值有何关系?

【知识梳理】

终边相同的角的同一三角函数的值________.

即

$\sin(\alpha+2k\pi)=$ ________,
$\cos(\alpha+2k\pi)=$ ________,
$\tan(\alpha+2k\pi)=$ ________,
其中 $k\in\mathbf{Z}$.

例 3 计算下列各式的值:

(1) $\sin(-1\ 395°)\cos 1\ 110°+\cos(-1\ 020°)\cdot\sin 750°$;

(2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\tan 4\pi$.

反思感悟 利用诱导公式一进行化简求值的步骤

(1)定形:将已知的任意角写成 $2k\pi+\alpha$ 的形式,$k\in\mathbf{Z}$,其中 $\alpha\in[0,2\pi)$.

(2)转化:根据诱导公式一,转化为求角 α 的某个三角函数值.

(3)求值:若角为特殊角,可直接求出该角的三角函数值.

跟踪训练 3

计算下列各式的值:

(1) $\tan 405°-\sin 450°+\cos 750°$;

(2) $\sin\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)三角函数的定义及求法.

(2)三角函数值在各象限内的符号.

(3)公式一.

2. 方法归纳:由特殊到一般、转化与化归、分类讨论.

3. 常见误区:三角函数值的大小只与角的大小有关,与终边上的点无关;正切函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

随堂演练

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$,$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$,则角 α 的终边与单位圆的交点坐标是 ( )

A. $\left(\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right)$

B. $\left(-\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$

C. $\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

D. $\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$

2. 已知角 α 的终边经过点(−4,3),则 $\cos\alpha$ 等于 ( )

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

3. (多选)若 $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$,则 θ 的终边在 ( )

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

4. 计算:$\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)+\tan\frac{9\pi}{4}=$________.

提醒:完成作业 第五章 5.2 5.2.1

5.2.2　同角三角函数的基本关系

【学习目标】1. 理解并掌握同角三角函数的基本关系. 2. 会用同角三角函数的基本关系进行三角函数式的求值、化简和证明.

一、利用同角三角函数的关系求值

问题 1　观察下表,你能发现什么?

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在

问题 2　若 $P(x,y)$ 是角 α 的终边与单位圆的交点,则角 α 的三个三角函数值之间有什么联系?

【知识梳理】

同角三角函数的基本关系

平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=$________;

商数关系:$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$________ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$.

这就是说,同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于 1,商等于角 α 的正切.

例 1　已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,求 $\sin\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

反思感悟　已知一个三角函数值求其他三角函数值的方法

(1)若已知 $\sin\alpha=m$,可以先应用公式 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$,求得 $\cos\alpha$ 的值,再由公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$求得 $\tan\alpha$ 的值.

(2)若已知 $\cos\alpha=m$,可以先应用公式 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$,求得 $\sin\alpha$ 的值,再由公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$求得 $\tan\alpha$ 的值.

(3)若已知 $\tan\alpha=m$,可以应用公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m\Rightarrow\sin\alpha=m\cos\alpha$ 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,求得 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,$\sin\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

(4)注意要根据角终边所在的象限,判断三角函数的符号.

跟踪训练 1

已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$,求 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 的值.

二、利用同角三角函数的关系化简

问题 3　你能发现同角三角函数的哪些变形形式?

例 2 化简：

(1) $\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$；

(2) $\frac{\sqrt{1+2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ+\sqrt{1-\cos^2 10^\circ}}$；

(3) $\sin^2\alpha\tan\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

反思感悟 三角函数式的化简技巧

(1)化切为弦，即把正切函数都化为正弦、余弦函数，从而减少函数名称，达到化繁为简的目的.

(2)对于含有根号的，常把根号里面的部分化成完全平方式，然后去根号达到化简的目的.

(3)对于化简含高次的三角函数式，往往借助于因式分解，或构造 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以降低函数次数，达到化简的目的.

跟踪训练 2

化简：$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}+(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$.

三、一般恒等式的证明

例 3 求证：$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}$.

跟踪训练 3

求证：$\frac{\tan\alpha\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)同角三角函数的基本关系.

(2)利用同角三角函数的基本关系求值、化简与证明.

2. 方法归纳：由部分到整体、整体代换法.

3. 常见误区：求值时注意 α 的范围，如果无法确定，一定要对 α 所在的象限进行分类讨论.

随堂演练

1. 已知锐角 α 满足 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha$ 等于 ( )

A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

2. 已知 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha$ 的值是 ( )

A. $\pm\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

3. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上一点 $A(2\sin\alpha,3)$，则 $\cos\alpha$等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知 α 是三角形的内角，且 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为________.

提醒：完成作业 第五章 5.2 5.2.2

习题课　同角三角函数的基本关系

【学习目标】1. 掌握利用同角三角函数的基本关系求值的几种类型.　2. 灵活运用同角三角函数的基本关系的几种变形证明恒等式.

一、弦切互化求值

例 1　已知 $\tan\alpha=-4$,求下列各式的值.

(1) $\sin^2\alpha$;

(2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

(3) $3\sin\alpha\cos\alpha$;

(4) $\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$.

反思感悟　已知 $\tan\alpha$ 的值,求关于 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 齐次式的值的方法

(1)对于形如 $\dfrac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ 或 $\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$ 的分式,分子、分母同时除以 $\cos\alpha,\cos^2\alpha$,将正弦、余弦转化为正切,从而求值.

(2)对于形如 $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$ 的式子,将其看成分母为 1 的分式,再将分母 1 变形为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$,转化为形如 $\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ 的式子求值.

跟踪训练 1

已知 $\dfrac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-1$,求下列各式的值.

(1) $\tan\alpha$;

(2) $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+1$.

二、$\sin\theta\pm\cos\theta$ 型求值问题

例 2　已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}(0<\theta<\pi)$,求 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 和 $\sin\theta-\cos\theta$ 的值.

跟踪训练 2

若 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$，则 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=$________.

三、条件恒等式的证明

例 3 已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

反思感悟 含有条件的三角恒等式证明的常用方法

(1)直推法：从条件直推到结论.

(2)代入法：将条件代入到结论中，转化为三角恒等式的证明.

(3)换元法：把条件和要证明的式子的三角函数问题转换为代数问题，利用代数即可完成证明.

跟踪训练 3

已知 $\dfrac{\cos^4A}{\cos^2B}+\dfrac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$，求证：$\dfrac{\cos^4B}{\cos^2A}+\dfrac{\sin^4B}{\sin^2A}=1$.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)弦切互化求值.

(2)$\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 型求值问题.

(3)条件恒等式的证明.

2. 方法归纳：整体代换法.

3. 常见误区：齐次式的化简求值容易忽略添加分母“1”.

随堂演练

1. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 的值为 ( )

A. 0 B. $\dfrac{3}{4}$

C. 1 D. $\dfrac{5}{4}$

2. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{5}{4}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 等于 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ B. $-\dfrac{9}{16}$

C. $-\dfrac{9}{32}$ D. $\dfrac{9}{32}$

3. 已知 $\dfrac{\cos x}{\sin x-1}=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ 于 ( )

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $-\dfrac{1}{2}$

C. 2 D. -2

4. 若 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=$ ________.

5.3 诱导公式

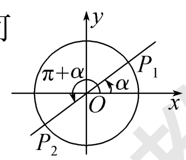
第 1 课时　诱导公式(一)

【学习目标】1. 理解诱导公式二～四的推导过程,识记诱导公式,理解和掌握公式的内涵和结构特征. 2. 会初步运用诱导公式求三角函数的值,并进行简单三角函数式的化简.

一、诱导公式二～四

问题 1　请同学们写出公式一.

问题 2　观察右图,思考我们是如何定义三角函数的?



问题 3　知道了终边与单位圆的交点坐标,你能根据三角函数的定义探究角 α 与角 $\pi+\alpha$ 的三角函数值之间的关系吗?

【知识梳理】

1. 公式二

$\sin(\pi+\alpha)=$ ________,

$\cos(\pi+\alpha)=$ ________,

$\tan(\pi+\alpha)=$ ________.

2. 公式三

$\sin(-\alpha)=$ ________,

$\cos(-\alpha)=$ ________,

$\tan(-\alpha)=$ ________.

3. 公式四

$\sin(\pi-\alpha)=$ ________,

$\cos(\pi-\alpha)=$ ________,

$\tan(\pi-\alpha)=$ ________.

二、给角求值

例 1　利用公式求下列三角函数值:

(1) $\cos(-480°)+\sin 210°$;

(2) $2\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{6}\cdot\tan\frac{37\pi}{6}$.

反思感悟 利用诱导公式求任意角三角函数值的步骤

(1)"负化正"——用公式一或三来转化.

(2)"大化小"——用公式一将角化为 0°到 360°间的角.

(3)"小化锐"——用公式二或四将大于 90°的角转化为锐角.

(4)"锐求值"——得到锐角三角函数后求值.

跟踪训练 1

$\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{4}-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=$________.

三、给值(式)求值

例 2 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$________.

反思感悟 解决条件求值问题的策略二

(1)解决条件求值问题,首先要仔细观察条件与所求式之间的角、函数名称及有关运算之间的差异及联系.

(2)可以将已知式进行变形向所求式转化,或将所求式进行变形向已知式转化.

跟踪训练 2

(1)已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{4}{5}$,且 α 是第四象限角,则 $\cos(\alpha-2\pi)$的值是 ( )

A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$

C. $\pm\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

(2)已知 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$,且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=$________.

四、利用公式进行化简

例 3 化简:

(1) $\frac{\cos(-\alpha)\tan(7\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}$;

(2) $\frac{\sin(1\ 440°+\alpha)\cdot\cos(\alpha-1\ 080°)}{\cos(-180°-\alpha)\cdot\sin(-\alpha-180°)}$.

跟踪训练 3

$\tan(5\pi+\alpha)=m$,则$\frac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$的值为 ( )

A. $\frac{m+1}{m-1}$ B. $\frac{m-1}{m+1}$ C. -1 D. 1

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)特殊关系角的终边对称性.

(2)诱导公式二~四.

2. 方法归纳:数形结合、公式法.

3. 常见误区:符号的确定.

随堂演练

1. $\sin 2\ 022°$等于 ( )

A. $\sin 42°$ B. $-\sin 42°$

C. $\sin 48°$ D. $-\sin 48°$

2. $\log_2\left(\cos\frac{7\pi}{4}\right)$的值为 ( )

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{3}{5}$,且 α 是第四象限角,那么 $\cos(\alpha-\pi)$的值是 ( )

A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\pm\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

4. 化简:$\frac{\cos(5\pi+\alpha)}{\sin(-3\pi-\alpha)}\cdot\tan(\pi+\alpha)=$________.

提醒:完成作业 第五章 5.3 第 1 课时

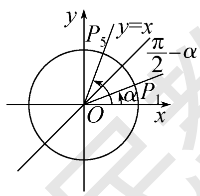
第 2 课时　诱导公式(二)

【学习目标】1. 理解公式五、六的推导过程并识记诱导公式,理解和掌握公式的内涵及结构特征.
2. 会初步运用诱导公式求三角函数的值,并进行简单三角函数式的化简.

一、公式五、六

问题 1　回顾上节课我们推导公式二的过程.

问题 2　观察下图,我们作了点 P_1 关于直线 $y=x$ 的对称点 P_5,你能发现这两点有什么关系吗?



【知识梳理】

1. 公式五

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$

2. 公式六

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$

二、化简求值

例 1　已知 $f(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\tan(-\alpha-\pi)\sin(-\alpha-\pi)}$,化简 $f(\alpha)$.

反思感悟　利用诱导公式化简、求值的策略

(1)已知角求值问题,关键是利用诱导公式把任意的三角函数值转化成锐角的三角函数值求解,转化过程中注意口诀“奇变偶不变,符号看象限”的应用.

(2)对式子进行化简或求值时,要注意要求的角与已知角之间的关系,并结合诱导公式进行转化,特别要注意角的范围.

(3)常见的互余的角:$\frac{\pi}{3}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{6}+\alpha$,$\frac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 等,常见的互补的角:$\frac{\pi}{6}+\alpha$ 与 $\frac{5\pi}{6}-\alpha$,$\frac{\pi}{3}+\alpha$ 与 $\frac{2\pi}{3}-\alpha$,$\frac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\frac{3\pi}{4}-\alpha$ 等.

跟踪训练 1

化简：

$$\frac{\sin(\theta-5\pi)\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(8\pi-\theta)}{\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\sin(-\theta-4\pi)}$$ 等于 (　　)

A. $-\sin\theta$　　B. $\sin\theta$

C. $\cos\theta$　　D. $-\cos\theta$

三、诱导公式的综合应用

例 2　(1)已知 $\cos 31°=m$，则 $\sin 239°\tan 149°$ 的值是 (　　)

A. $\frac{1-m^2}{m}$　　B. $\sqrt{1-m^2}$

C. $-\frac{1-m^2}{m}$　　D. $-\sqrt{1-m^2}$

(2)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$的值为________.

跟踪训练 2

(1)已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，求$\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$的值.

(2)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，求下列各式的值：

①$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$；

②$\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$.

【课堂小结】

1. 知识清单：利用诱导公式进行化简、求值与证明.
2. 方法归纳：公式法、角的构造.
3. 常见误区：函数符号的变化，角与角之间的联系与构造.

随堂演练

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$等于 (　　)

A. $\frac{5}{13}$　　B. $\frac{12}{13}$

C. $-\frac{5}{13}$　　D. $-\frac{12}{13}$

2. 已知 $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$等于 (　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值等于 (　　)

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

4. 化简：$\frac{\cos(6\pi+\theta)\sin(-2\pi-\theta)\tan(2\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.3　第 2 课时

第 3 课时　公式的综合应用

【学习目标】1. 熟练掌握六组诱导公式的结构特征.　2. 会利用六组诱导公式求值、证明.

一、利用诱导公式证明恒等式

例 1　求证：$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\sin^2(\pi+\theta)}$.

跟踪训练 1

证　明：$\dfrac{\cos(2\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)}+\dfrac{\cos(\pi-\theta)}{\cos\theta\left[\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)-1\right]}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$.

二、诱导公式在实际问题中的应用

问题 1　三角形中其中一个角与另外两角和是什么关系？

问题 2　直角三角形中，两锐角是什么关系？

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，$\sin\dfrac{A+B-C}{2}=\sin\dfrac{A-B+C}{2}$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

反思感悟　利用诱导公式解决实际问题时，需注意公式四和公式五中的互补和互余，是广义上的互补和互余，在涉及三角形问题时，一定要注意根据三角形内角和 $A+B+C=\pi$ 以及题目的具体条件进行适当变形，再化简求值.

跟踪训练 2

在$\triangle ABC$中，下列各表达式为常数的是　(　　)

A. $\sin(A+B)+\sin C$

B. $\cos(B+C)-\cos A$

C. $\sin^2\frac{A+B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

D. $\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}$

三、三角函数的综合应用

例 3　已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$.

(1)求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

(2)若角 β 就是将角 α 的终边顺时针旋转 $\frac{3\pi}{2}$ 得到，求 $5\sin\beta-5\cos\beta+3\tan\beta$ 的值.

反思感悟　用诱导公式化简求值的方法

(1)对于三角函数式的化简求值问题，一般遵循诱导公式先行的原则，即先用诱导公式化简变形，达到角的统一，再进行切化弦，以保证三角函数名最少.

(2)对于 $\pi\pm\alpha$ 和 $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 这两套诱导公式，切记运用前一套公式不变名，而运用后一套公式必须变名.

跟踪训练 3

若角 α 的终边上有一点 $P(m,-8)$，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

(1)求 m 的值；

(2)求$\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\tan(-\alpha-\pi)\cos(-\alpha)}$的值.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)识记诱导公式.

(2)三角形角的特点.

(3)结合三角函数定义进行化简、求值、证明.

2. 方法归纳：公式法.

3. 常见误区：实际问题中角的范围.

随堂演练

1. 在$\triangle ABC$中，$\cos(A+B)$的值等于　(　　)

A. $\cos C$　　B. $-\cos C$

C. $\sin C$　　D. $-\sin C$

2. 已知 $\sin 40°=a$，则 $\cos 130°$等于　(　　)

A. a　　B. $-a$

C. $\sqrt{1-a^2}$　　D. $-\sqrt{1-a^2}$

3. 已知角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(-1,2)$，则$\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(3\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}$等于　(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. 1

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

4. 计算：$\sin^2 11°+\sin^2 79°=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.3　第 3 课时

5.4 三角函数的图象与性质

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

【学习目标】 1. 理解正弦曲线和余弦曲线间的关系，会用“五点(画图)法”画给定区间上的正弦函数、余弦函数的图象. 2. 掌握正弦函数与余弦函数图象间的关系以及图象的变换，能通过函数图象解决简单的问题.

一、正弦函数、余弦函数图象的初步认识

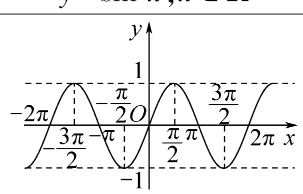
问题 1 结合之前所学，研究函数的一般步骤是什么？

问题 2 绘制函数图象，首先要准确绘制其上一点，对于正弦函数，在 $[0,2\pi]$ 上任取一个值 x_0，如何借助单位圆确定正弦函数值 $\sin x_0$，并画出点 $T(x_0,\sin x_0)$？

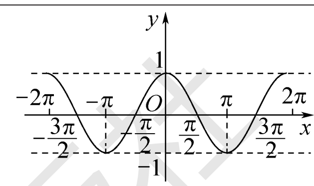
问题 3 我们已经学会绘制函数图象上的点，接下来，如何画函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象？你能想到什么方法？

【知识梳理】

1. 正弦函数的图象叫做正弦曲线.

函数	$y=\sin x, x\in\mathbf{R}$
图象	

2. 余弦函数的图象叫做余弦曲线.

函数	$y=\cos x, x\in\mathbf{R}$
图象	

例 1 (1)下列叙述正确的个数为 ( )

①$y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象关于点 $P(\pi,0)$ 成中心对称；

②$y=\cos x, x\in[0,2\pi]$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 成轴对称；

③正弦、余弦函数的图象不超过直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 所夹的范围.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2)关于三角函数的图象，有下列命题：

①$y=\sin|x|$ 与 $y=\sin x$ 的图象关于 y 轴对称；

②$y=\cos(-x)$ 与 $y=\cos|x|$ 的图象相同；

③$y=|\sin x|$ 与 $y=\sin(-x)$ 的图象关于 x 轴对称；

④$y=\cos x$ 与 $y=\cos(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

其中正确命题的序号是________.

反思感悟 解决正弦、余弦函数图象的注意点对于正弦、余弦函数的图象问题，要画出正确的正弦曲线、余弦曲线，掌握两者的形状相同，只是在坐标系中的位置不同，可以通过相互平移得到.

跟踪训练 1

下列关于正弦函数、余弦函数的图象的描述，不正确的是 ( )

A. 都可由 $[0,2\pi]$ 内的图象向上、向下无限延展得到

B. 都是对称图形

C. 都与 x 轴有无数个交点

D. $y=\sin(-x)$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象关于 x 轴对称

二、"五点(画图)法"画函数的图象

问题 4 如何画函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的简图?

【知识梳理】

"五点(画图)法"

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象画法	五点法	五点法
关键	________, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, ________, $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$, ________	$(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,-1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $(2\pi,1)$

例 2 用"五点法"作下列函数的图象:

(1) $y=1-2\sin x, x\in[0,2\pi]$;

(2) $y=\cos x+\frac{1}{2}, x\in[-\pi,\pi]$.

反思感悟 作形如 $y=a\sin x+b$(或 $y=a\cos x+b$), $x\in[0,2\pi]$ 的图象的三个步骤

列表 — 在$[0,2\pi]$内先确定所求函数图象的五个关键点,在表中列出相应的五点的坐标

↓

描点 — 根据所列出的五个关键点的坐标,在坐标系中描出相应的点

↓

连线 — 用光滑的曲线将所描出的五个关键点连接起来,便得到所求函数的图象

跟踪训练 2

用"五点法"在同一坐标系下画出下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的图象:

(1) $y=-\sin x$;(2) $y=2-\cos x$.

三、正弦函数、余弦函数图象的应用

例 3 不等式 $2\sin x-1\geqslant 0, x\in[0,2\pi]$ 的解集为 (   )

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

B. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$

D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

反思感悟 利用三角函数图象解三角不等式 $\sin x>a$($\cos x>a$)的步骤

(1)作出相应的正弦函数或余弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象.

(2)确定在$[0,2\pi]$上 $\sin x=a$($\cos x=a$)的x值.

(3)写出不等式在区间$[0,2\pi]$上的解集.

(4)根据公式一写出定义域内的解集.

跟踪训练 3

方程 $x^2-\cos x=0$ 的实数解的个数是________，所有的实数解的和为________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

 (1)正弦函数、余弦函数的图象.

 (2)“五点法”作图.

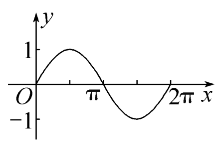
 (3)函数图象的应用.

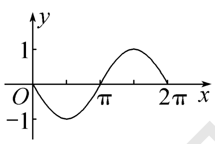
2. 方法归纳：数形结合.

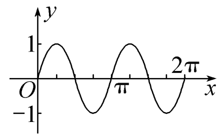
3. 常见误区：五点的选取；平移得余弦函数的图象.

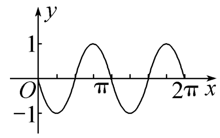
随堂演练

1. 函数 $y=\sin(-x)$，$x\in[0,2\pi]$的简图是( )

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 用“五点法”画函数 $y=1+\frac{1}{2}\sin x$ 的图象时，首先应描出五点的横坐标是( )

A. $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$ B. $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

C. $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$ D. $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$

3. 在$[0,2\pi]$内，不等式 $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$的解集是( )

A. $(0,\pi)$ B. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ D. $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$

4. 函数 $y=\cos x+4$，$x\in[0,2\pi]$的图象与直线 $y=4$ 的交点的坐标为________.

提醒：完成作业 第五章 5.4 5.4.1

5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

第 1 课时 周期性与奇偶性

【学习目标】1. 理解周期函数的概念，能熟练地求出简单三角函数的周期. 2. 会根据之前所学和函数的图象研究三角函数的奇偶性，能正确判断一些三角函数的变式的奇偶性.

一、正弦函数、余弦函数的周期

问题 1 正弦函数、余弦函数的图象有什么特点？

【知识梳理】

1. 函数的周期性

 一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在一个________，使得对每一个 $x\in D$ 都有 $x+T\in D$，且________，那么函数 $f(x)$就叫做周期函数.________叫做这个函数的周期.

2. 最小正周期

 如果在周期函数 $f(x)$的所有周期中存在一个________，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$的最小正周期.

3. 正弦函数是________，$2k\pi$($k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$)都是它的周期，最小正周期是________.

4. 余弦函数是________，$2k\pi$($k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$)都是它的周期，最小正周期是________.

例 1　求下列三角函数的周期.

(1) $y=7\sin x, x\in\mathbf{R}$;

(2) $y=\sin 2x, x\in\mathbf{R}$;

(3) $y=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$;

(4) $y=|\cos x|, x\in\mathbf{R}$.

跟踪训练 1

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)\cdot f(x)=-1$，则 $f(x)$ 的周期为　　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 1

二、正弦函数、余弦函数的奇偶性

问题 2　继续回顾正弦函数、余弦函数的图象，你还能发现什么特点？

【知识梳理】

正弦函数是________，余弦函数是________.

例 2　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{3\pi}{2}\right)$;

(2) $f(x)=|\sin x|+\cos x$;

(3) $f(x)=x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

反思感悟 判断函数奇偶性的方法

(1)判断函数奇偶性应把握好的两个方面：

一看函数的定义域是否关于原点对称；

二看 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

(2)对于三角函数奇偶性的判断，有时可根据诱导公式先将函数式化简后再判断.

提醒：研究函数性质应遵循"定义域优先"的原则.

跟踪训练 2

判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sin x\cos x$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x-1}$.

三、三角函数奇偶性与周期性的综合应用

问题 3 知道一个函数具有周期性和奇偶性，对研究它的图象和性质有什么帮助？

例 3 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数，又是周期函数，若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ 等于 ( )

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

跟踪训练 3

函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)(\omega\neq0)$，则 $f(x)$ 是________(填"奇函数"或"偶函数")，若 $f(x)$ 的周期为 π，则 $\omega=$________.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)周期函数的概念，三角函数的周期.

(2)三角函数的奇偶性.

(3)三角函数周期性、奇偶性的综合应用.

2. 方法归纳：定义法、公式法、数形结合.

3. 常见误区：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 A,ω,φ 是常数，且 $A\neq0,\omega\neq0$)的周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

随堂演练

1. 函数 $f(x)=\sin(-x)$ 的奇偶性是 ( )

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

2. 下列函数中,周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是　　(　　)

A. $y=\sin\frac{x}{2}$　　B. $y=\sin 2x$

C. $y=\cos\frac{x}{4}$　　D. $y=\cos(-4x)$

3. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right),x\in\mathbf{R}$,则 $f(x)$ 是　　(　　)

A. 最小正周期为 π 的奇函数

B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

4. 已知 $f(x)$ 为奇函数,且周期为 $\frac{3\pi}{4}$,若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$,则 $f\left(\frac{23\pi}{4}\right)=$________.

提醒:完成作业　第五章　5.4　5.4.2　第 1 课时

第 2 课时　单调性与最值

【学习目标】1. 理解正弦函数、余弦函数的单调性具有周期性变化的规律,通过一个周期内的单调性进而研究在整个定义域上的性质.　2. 能够利用函数的单调性解决比较函数值的大小以及求函数的最值、值域等问题.

一、正弦函数、余弦函数的单调性

问题　你能作出正弦函数 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的函数图象吗?

【知识梳理】

1. 正弦函数的单调性

在每一个闭区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都________,其值从 -1 增大到 1;在每一个闭区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都________,其值从 1 减小到 -1.

2. 余弦函数的单调性

在每一个闭区间 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都________,其值从 -1 增大到 1;在每一个闭区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都________,其值从 1 减小到 -1.

二、利用单调性比较大小

例 1　利用三角函数的单调性,比较下列各组数的大小.

(1) $\cos\frac{15\pi}{8},\cos\frac{14\pi}{9}$;

(2) $\cos 1,\sin 1$;

(3) $\sin 164°$ 与 $\cos 110°$.

跟踪训练 1

(1)已知 α,β 为锐角三角形的两个内角,则以下结论正确的是　　(　　)

A. $\sin\alpha<\sin\beta$

B. $\cos\alpha<\sin\beta$

C. $\cos\alpha<\cos\beta$

D. $\cos\alpha>\cos\beta$

(2)下列关系式中正确的是　　(　　)

A. $\sin 11°<\sin 168°<\cos 10°$

B. $\sin 168°<\sin 11°<\cos 10°$

C. $\sin 11°<\cos 10°<\sin 168°$

D. $\sin 168°<\cos 10°<\sin 11°$

三、求正弦函数、余弦函数的单调区间

例 2 求函数 $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的单调区间.

跟踪训练 2

(1)函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$, $x\in[0,2\pi]$的单调递减区间为________.

(2)求函数 $y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的单调区间.

四、正弦函数、余弦函数的最值(值域)

【知识梳理】

1. 正弦函数:当且仅 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值 1;当且仅当 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值 -1.
2. 余弦函数:当且仅当 $x=$________$(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值 1;当且仅当 $x=$________$(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值 -1.

例 3 已知函数 $f(x)=a\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+b(a>0)$.当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)$的最大值为 $\sqrt{3}$,最小值为 -2,求 a 和 b 的值.

跟踪训练 3

求函数 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$的值域.

【课堂小结】

1. 知识清单:
   (1)正弦、余弦函数的单调区间.
   (2)比较三角函数值的大小.
   (3)正弦、余弦函数的最值(值域).
2. 方法归纳:整体代换、换元法.
3. 常见误区:单调区间漏写 $k\in\mathbf{Z}$;求值域时忽视 $\sin x$, $\cos x$ 本身具有的范围.

随堂演练

1. 函数 $y=-\cos x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上 ( )

   A. 单调递增　　B. 单调递减

   C. 先减后增　　D. 先增后减

2. 函数 $y=2-\sin x$ 的最大值及取最大值时 x 的值为 ( )

   A. $y_{\max}=3$, $x=\dfrac{\pi}{2}$

   B. $y_{\max}=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

   C. $y_{\max}=3$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

   D. $y_{\max}=3$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

3. 函数 $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为 ( )

   A. -2　　B. 1

   C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调递减区间是________.

提醒:完成作业　第五章　5.4　5.4.2　第 2 课时

第 3 课时　正弦函数、余弦函数的性质的综合问题

【学习目标】 1. 掌握正弦函数、余弦函数的基本性质，能够了解函数的整体性质.　2. 能够解决简单的函数性质的综合问题.

一、形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c\ (a\neq 0)$ 型函数的最值(值域)问题

问题 1　求二次函数的最值，需要明确哪些方面？

问题 2　同角三角函数的平方关系是什么？

例 1　函数 $y=\cos^2x+2\sin x-2, x\in\mathbf{R}$ 的值域为________.

反思感悟　求 $y=a\sin^2x+b\sin x+c\ (a\neq 0)$ 型函数最值(值域)的方法

形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c\ (a\neq 0)$ 型，可利用换元思想，设 $t=\sin x$，转化为二次函数 $y=at^2+bt+c$ 求最值. t 的范围需要根据定义域来确定. 若 $f(x)=a\sin^2x+b\cos x+c$，还需利用同角三角函数的基本关系，转化成同名三角函数求值.

跟踪训练 1

函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是________.

二、正弦函数、余弦函数的对称性

问题 3　正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数，正弦曲线关于原点对称，即原点是正弦曲线的对称中心，除原点外，正弦曲线还有其他对称中心吗？如果有，那么对称中心的坐标是多少？

问题 4　正弦曲线是轴对称图形吗？如果是，其对称轴方程是什么？

问题 5　类比正弦函数的对称轴和对称中心，你能写出余弦函数的对称轴和对称中心吗？

例 2 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象的对称轴是直线________,对称中心是________.

反思感悟 正弦曲线、余弦曲线的对称轴一定分别过正弦曲线、余弦曲线的最高点或最低点,即此时的正弦值、余弦值取最大值或最小值;正弦曲线、余弦曲线的对称中心一定是正弦曲线、余弦曲线与 x 轴的交点,即此时的正弦值、余弦值为 0. 考查了整体代换的数学思想.

跟踪训练 2

求函数 $y=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$的对称轴、对称中心.

三、函数性质的综合应用

例 3 若函数 $y=f(x)$同时满足下列三个性质:①最小正周期为 π;②图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称;③在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,则 $y=f(x)$的解析式可以是 ( )

A. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

B. $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

D. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

跟踪训练 3

函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$的图象与函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$对称,则关于函数 $g(x)$以下说法正确的是 ( )

A. 最大值为 1,图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称

B. 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,为奇函数

C. 在 $\left(-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增,为偶函数

D. 周期为 π,图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c(a\neq0)$型函数的最值(值域)问题.

(2)正弦函数、余弦函数图象的对称轴和对称中心.

(3)函数性质的综合运用.

2. 方法归纳:整体代换法、换元法.

3. 常见误区:二次函数的最值问题.

随堂演练

1. 已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称,则 φ 的值可以是 (   )

A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{3}$

2. 已知函数 $y=4\cos x$ 的定义域为 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$,值域为 $[a,b]$,则 $b-a$ 的值是 (   )

A. 4　　B. $4-2\sqrt{3}$

C. 6　　D. $4+2\sqrt{3}$

3. 已知直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 是曲线 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$ 的两条对称轴,且函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减,则 φ 的值是 (   )

A. $-\frac{\pi}{2}$　　B. 0

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

4. 函数 $y=\cos^2 x+\sin x$ 的最大值为________.

提醒:完成作业　第五章　5.4　5.4.2　第 3 课时

5.4.3　正切函数的性质与图象

【学习目标】1. 了解正切函数图象的画法,理解并掌握正切函数的性质.　2. 能够利用正切函数的图象与性质解决相关问题.

一、正切函数的定义域、周期性与奇偶性

问题 1　请同学们回忆角的正切是如何定义的?

问题 2　角 α 是任意的吗?

问题 3　由以上,你能定义正切函数吗?

问题 4　你还记得诱导公式二、三中和正切有关的公式吗?

【知识梳理】

1. 周期性:由诱导公式 $\tan(\pi+x)=\tan x$, $x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,可知正切函数是________,周期是 π.

2. 奇偶性:由诱导公式 $\tan(-x)=-\tan x$, $x\in\mathbf{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,可知正切函数是________.

例 1　(1)函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的定义域是(　　)

A. $\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{4}\right\}$

B. $\left\{x \mid x\neq-\frac{\pi}{4}\right\}$

C. $\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)函数 $f(x)=\tan\left(-4x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期为(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

跟踪训练 1

函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\tan x$ 为(　　)

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 非奇非偶函数

D. 既是奇函数又是偶函数

二、正切函数的图象

问题 5　你认为正切函数的周期性和奇偶性对研究它的图象及其他性质会有什么帮助?

问题 6　如何画出函数 $y=\tan x$ 的图象?

【知识梳理】

正切函数图象对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

例 2　函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$图象的一个对称中心是(　　)

A. $(0,0)$　　B. $\left(\frac{\pi}{5},0\right)$

C. $\left(\frac{4\pi}{5},0\right)$　　D. $(\pi,0)$

跟踪训练 2

(1)$y=a$(a 为常数)与 $y=\tan 3x$ 图象相交时,相邻两交点间的距离为(　　)

A. π　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{a}{3}\pi$

(2)与函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象不相交的一条直线是(　　)

A. $x=\frac{\pi}{2}$　　B. $y=\frac{\pi}{2}$

C. $x=\frac{\pi}{8}$　　D. $y=\frac{\pi}{8}$

【知识梳理】

1. 单调性:正切函数在每一个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$上都________.

2. 值域:正切函数没有最大值和最小值,故正切函数的值域是________.

例 3　已知函数 $f(x)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期和单调递减区间;

(2)试比较 $f(\pi)$与 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$的大小.

反思感悟 (1)运用正切函数单调性比较大小的方法

①运用函数的周期性或诱导公式将角化到同一单调区间内.

②运用单调性比较大小.

(2)求函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的单调区间的方法

$y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的单调区间的求法是把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体,解 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\omega x+\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 即可. 当 $\omega<0$ 时,先用诱导公式把 w 化为正值再求单调区间.

跟踪训练 3

求函数 $y=-\tan^2x+4\tan x+1$, $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 的值域.

四、正切函数图象与性质的综合应用

例 4 设函数 $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域、最小正周期、单调区间及对称中心;

(2)求不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集.

跟踪训练 4

画出函数 $y=|\tan x|$ 的图象,并根据图象判断其定义域、值域、单调区间、奇偶性、周期性.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)正切函数图象的画法.

(2)正切函数的性质.

2. 方法归纳:整体代换、换元法.

3. 常见误区:最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$,在定义域内不单调,对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

随堂演练

1. 函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为 ( )

A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

2. 函数 $y=-2+\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间是 ( )

A. $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(k\pi-\frac{5\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$

3. 函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象 ( )

A. 关于原点对称

B. 关于点 $\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$对称

C. 关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$对称

D. 关于点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$对称

4. 比较大小:$\tan\frac{13\pi}{3}$________$\tan\frac{19\pi}{6}$.

提醒:完成作业 第五章 5.4 5.4.3

5.5　三角恒等变换

5.5.1　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

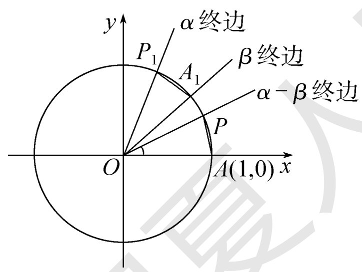
第 1 课时　两角差的余弦公式

【学习目标】1. 两角差的余弦公式的推导过程.　2. 两角差的余弦公式的应用.

一、两角差的余弦公式

问题 1　已知角 α 的终边与单位圆的交点为 P，请写出点 P 的坐标.

问题 2　观察下图，并阅读教材 P215 以及右下角的注解部分，分组讨论，你能得到哪些结论？



问题 3　你还记得初中所学两点间的距离公式吗？

【知识梳理】

两角差的余弦公式

$\cos(\alpha-\beta)=$________，

其中 α,β 为任意角，简记作 $C_{(\alpha-\beta)}$.

例 1　(1) $\cos 15°$的值是　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2)求下列各式的值：

①$\cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{6}$；

②$\dfrac{1}{2}\cos 105°+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 105°$.

反思感悟 两角差的余弦公式常见题型及解法

(1)两特殊角之差的余弦值,利用两角差的余弦公式直接展开求解.

(2)含有常数的式子,先将系数转化为特殊角的三角函数值,再利用两角差的余弦公式求解.

(3)求非特殊角的三角函数值,把非特殊角转化为两个特殊角的差,然后利用两角差的余弦公式求解.

跟踪训练 1

求下列各式的值:

(1) $\cos(\theta+21°)\cos(\theta-24°)+\sin(\theta+21°)\sin(\theta-24°)$;

(2) $-\sin 167°\cdot\sin 223°+\sin 257°\cdot\sin 313°$;

(3) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.

二、给值求值

问题 4 正弦、余弦、正切在每个象限内的符号如何?

例 2 (1)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$,则 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 的值为 ( )

A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -1

(2)已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,则 $\cos\alpha=$ ________.

反思感悟 给值求值的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值,求另外一些角的三角函数值,要注意观察已知角与所求表达式中角的关系,即拆角与凑角.

(2)由于和、差角与单角是相对的,因此解题过程中根据需要灵活地进行拆角或凑角的变换,常见角的变换有:

①$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$;

②$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$;

③$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

跟踪训练 2

已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$,求 $\cos\beta$ 的值.

三、给值求角

问题 5 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,你能求 $\beta-\alpha$ 的取值范围吗?

例 3 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$,且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,求 β 的值.

反思感悟 已知三角函数值求角的解题步骤

(1)界定角的范围,根据条件确定所求角的范围.

(2)求所求角的某种三角函数值. 为防止增解最好选取在范围内单调的三角函数.

(3)结合三角函数值及角的范围求角.

提醒:由三角函数值求角时,易忽视角的范围,而得到错误答案.

跟踪训练 3

已知 α,β 均为锐角,且 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,求 $\alpha-\beta$ 的值.

【课堂小结】

1. 知识清单:
   (1)两角差的余弦公式的推导.
   (2)给角求值、给值求值、给值求角.
2. 方法归纳:构造法.
3. 常见误区:求角时忽视角的范围.

随堂演练

1. $\cos 20°$等于 ( )
   A. $\cos 30°\cos 10°-\sin 30°\sin 10°$
   B. $\cos 30°\cos 10°+\sin 30°\sin 10°$
   C. $\sin 30°\cos 10°-\sin 10°\cos 30°$
   D. $\sin 30°\cos 10°+\sin 10°\cos 30°$

2. $\cos(\alpha-35°)\cos(25°+\alpha)+\sin(\alpha-35°)\cdot\sin(25°+\alpha)$的值为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值为　　(　　)

A. $\frac{5\sqrt{2}}{13}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{13}$

C. $\frac{17\sqrt{2}}{26}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{26}$

4. 若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 α,β 均为锐角，$\alpha<\beta$，则 $\alpha+\beta=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.5　5.5.1　第 1 课时

第 2 课时　两角和与差的正弦、余弦公式

【学习目标】1. 掌握由两角差的余弦公式推导出两角和的余弦公式以及两角和与差的正弦公式. 2. 会利用两角和与差的正弦、余弦公式进行简单的求值、化简、计算等. 3. 熟悉两角和与差的正弦、余弦公式的灵活运用，以及公式的正用、逆用以及角的变换的常用方法.

一、两角和的余弦公式和两角和与差的正弦公式

问题 1　请同学们写出两角差的余弦公式.

问题 2　试比较 $\cos(\alpha-\beta)$和 $\cos(\alpha+\beta)$，观察两者之间的联系，你能发现什么?

【知识梳理】

1. 两角和的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=$____________，

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，简记作 $C_{(\alpha+\beta)}$.

2. 两角和与差的正弦公式

$\sin(\alpha+\beta)=$____________，

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，简记作 $S_{(\alpha+\beta)}$；

$\sin(\alpha-\beta)=$____________，

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，简记作 $S_{(\alpha-\beta)}$.

例 1　(1)$\frac{2\sin 40^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$的值是　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

(2)$\cos 70^\circ\cos 50^\circ+\cos 200^\circ\cos 40^\circ$的值为　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

跟踪训练 1

$\frac{\sin 47^\circ-\sin 17^\circ\cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}=$________.

二、给值求值

例 2　已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，且 α 为第一象限角，β 为第二象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$的值.

反思感悟 给值求值的解题策略

(1)在解决此类题目时,一定要注意已知角与所求角之间的关系,恰当地运用拆角、拼角技巧,同时分析角之间的关系,利用角的代换化异角为同角,具体做法是:

①当条件中有两角时,一般把“所求角”表示为已知两角的和或差;

②当条件中只有一个已知角时,可利用诱导公式把所求角转化为已知角.

(2)此类问题中,角的范围不容忽视,解题时往往需要根据三角函数值缩小角的范围.

跟踪训练 2

已知$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$,求 $\cos 2\alpha$ 与 $\cos 2\beta$ 的值.

三、给值求角

例 3 已知锐角 α,β 满足 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,则 $\alpha+\beta=$________.

反思感悟 解决给值(式)求角问题的方法

解决此类题目的关键是求出所求角的某一三角函数值,而三角函数的选取一般要根据所求角的范围来确定,当所求角范围是 $(0,\pi)$ 或 $(\pi,2\pi)$ 时,选取求余弦值,当所求角范围是 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,选取求正弦值.

跟踪训练 3

已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,且 α 和 β 均为钝角,求 $\alpha+\beta$ 的值.

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)公式的推导.

(2)给式求值、给值求值、给值求角.

(3)公式的正用、逆用、变形用.

2. 方法归纳：构造法.

3. 常见误区：求值或求角时忽视角的范围.

随堂演练

1. sin 105°的值为　　　　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2. $\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°$等于　　(　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，α 是第三象限角，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$等于　　(　　)

A. $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

4. $\sin 15°-\sqrt{3}\cos 15°=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.5　5.5.1　第 2 课时

第 3 课时　两角和与差的正切公式

【学习目标】 1. 能利用两角和与差的正弦、余弦公式推导出两角和与差的正切公式.　2. 能利用两角和与差的正切公式进行化简、求值.　3. 熟悉两角和与差的正切公式的常见变形，并能灵活应用.

一、两角和与差的正切公式

问题 1　请同学们写出两角和与差的正弦公式、余弦公式.

问题 2　同角三角函数中的商数关系是什么？

问题 3　你能用两角和与差的正弦、余弦公式来表示两角和与差的正切公式吗？

【知识梳理】

1. 两角和的正切公式

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$,其中 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,简记作 $T_{(\alpha+\beta)}$.

2. 两角差的正切公式

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,其中 $\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,简记作 $T_{(\alpha-\beta)}$.

例 1 (1) $\tan 255°$等于 ( )

A. $-2-\sqrt{3}$ B. $-2+\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$ D. $2+\sqrt{3}$

(2)化简$\dfrac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}$等于 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 1

反思感悟 利用公式 $T_{(\alpha\pm\beta)}$化简求值的两点说明

(1)分析式子结构,正确选用公式形式:

$T_{(\alpha\pm\beta)}$是三角函数公式中应用灵活程度较高的公式之一,因此在应用时先从所化简(求值)式子的结构出发,确定是正用、逆用还是变形用,并注意整体代换.

(2)化简求值中要注意"特殊值"的代换和应用:当所要化简(求值)的式子中出现特殊的数值"1""$\sqrt{3}$"时,要考虑用这些特殊值所对应的特殊角的正切值去代换,如"$1=\tan\dfrac{\pi}{4}$""$\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$",这样可以构造出利用公式的条件,从而可以进行化简和求值.

跟踪训练 1

化简求值:

(1)$\dfrac{\tan 74°+\tan 76°}{1-\tan 74°\tan 76°}$;

(2)$\dfrac{1-\tan 15°}{\sqrt{3}+\tan 60°\tan 15°}$;

(3)$\tan 23°+\tan 37°+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°$.

二、给值求值(角)

问题 4 根据两角和与差的正切公式的特点以及上述练习,你能写出几种公式的变形形式吗?

例 2 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\tan(\pi-\beta)=\dfrac{1}{2}$,则$\tan(\alpha-\beta)$的值为 ( )

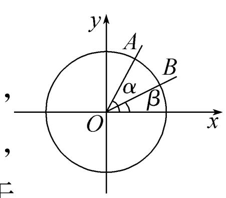
A. $-\dfrac{2}{11}$ B. $\dfrac{2}{11}$

C. $\dfrac{11}{2}$ D. $-\dfrac{11}{2}$

反思感悟 (1)关于求值问题,利用角的代换,将所求角转化为已知角的和与差,再根据公式求解.

(2)关于求角问题,先确定该角的某个三角函数值,再根据角的取值范围确定该角的大小.

跟踪训练 2



如图,在平面直角坐标系 xOy 中,以 Ox 轴为始边作两个锐角 α,β,它们的终边分别与单位圆相交于 A,B 两点,已知 A,B 的横坐标分别为$\dfrac{\sqrt{2}}{10},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.求:

(1)$\tan(\alpha+\beta)$的值;

(2)$\alpha+2\beta$ 的大小.

三、两角和与差的正切公式的综合应用

例 3 设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根，则 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值为 ( )

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

跟踪训练 3

(多选)在△ABC 中，$C=120°$，$\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，下列各式中正确的是 ( )

A. $A+B=2C$　　B. $\tan(A+B)=-\sqrt{3}$

C. $\tan A=\tan B$　　D. $\cos B=\sqrt{3}\sin A$

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)两角和与差的正切公式的推导.

(2)公式的正用、逆用、变形.

2. 方法归纳：转化法.

3. 常见误区：公式中加减符号易记错.

随堂演练

1. 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$等于 ( )

A. $-\frac{1}{7}$　　B. -7

C. $\frac{1}{7}$　　D. 7

2. $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，则 $\tan(\alpha+\beta)$ 等于 ( )

A. 1　　B. 5　　C. -1　　D. -5

3. 已知 α，β 都是锐角，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，则 $\alpha+\beta$ 的值为 ( )

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 计算：$\frac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.5　5.5.1　第 3 课时

第 4 课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

【学习目标】1. 会用两角和(差)的正弦、余弦、正切公式推导出二倍角的正弦、余弦、正切公式.
2. 能熟练运用二倍角的公式进行简单的三角恒等变换并能灵活地将公式变形运用.

一、二倍角的正弦、余弦、正切公式

问题 1 请同学们写出两角和的正弦、余弦、正切公式.

问题 2 你能写出 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的表达式吗？

【知识梳理】

1. 二倍角的正弦公式

$\sin 2\alpha=$________，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$，简记作 $S_{2\alpha}$.

2. 二倍角的余弦公式

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$________$=$________，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$，简记作 $C_{2\alpha}$.

3. 二倍角的正切公式

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，简记作 $T_{2\alpha}$.

例 1 求下列各式的值：

(1) $\sin^2\frac{5\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}$；

(2) $\frac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$；

(3) $\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°$.

反思感悟　对于给角求值问题，一般有两类

(1)直接正用、逆用二倍角公式，结合诱导公式和同角三角函数的基本关系对已知式子进行转化，一般可以化为特殊角.

(2)若形式为几个非特殊角的三角函数式相乘，则一般逆用二倍角的正弦公式，在求解过程中，需利用互余关系配凑出应用二倍角公式的条件，使得问题出现可以连用二倍角的正弦公式的形式.

跟踪训练 1

求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

(2) $\frac{\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$;

(3) $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$.

二、给值求值

例 2　已知 $\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<2\pi$, 求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$的值.

跟踪训练 2

已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$, $0<x<\frac{\pi}{4}$, 求$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$的值.

三、倍角公式的综合运用

例 3 已知$\triangle ABC$的三个内角为A,B,C,$f(B)=4\cos B\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2B-2\cos B$.

(1)若$f(B)=2$,求B的大小;

(2)若$f(B)-m>2$恒成立,求实数m的取值范围.

跟踪训练 3

若$\alpha\in(0,\pi)$,$\cos\alpha$,$\sin\alpha$是一元二次方程$x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}=0$的两个实根,则$\cos 2\alpha$等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{17}}{9}$ B. $\pm\frac{\sqrt{17}}{9}$

C. $-\frac{\sqrt{17}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)二倍角公式的推导.

(2)利用二倍角公式的正用、逆用进行化简、求值和证明.

2. 方法归纳:转化法.

3. 常见误区:化简求值开根号时,忽视角的范围、实际问题中隐含的条件.

随堂演练

1. 下列各式中,值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的是 ( )

A. $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$

B. $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

C. $2\sin^2 15^\circ$

D. $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$

2. 若$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$\cos\alpha$等于 ( )

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知$\sin 2\alpha=-\frac{1}{3}$,则$\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值为( )

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 设$\sin 2\alpha=-\sin\alpha$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则$\tan 2\alpha$的值是________.

提醒:完成作业 第五章 5.5 5.5.1 第 4 课时

5.5.2　简单的三角恒等变换

第1课时　简单的三角恒等变换(一)

【学习目标】1. 通过二倍角公式的变形公式推导出半角的正弦、余弦、正切公式.　2. 了解半角公式的结构形式,并能利用半角公式解决简单的求值问题.　3. 掌握两角和、差的正、余弦公式,通过积化和差、和差化积进行简单的化简、求值、证明.

一、半角公式

问题1　余弦的二倍角展开有几种形式?请写出.

【知识梳理】

半角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=$________,

$\cos\frac{\alpha}{2}=$________,

$\tan\frac{\alpha}{2}=$________.

例1　已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, 求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$的值.

反思感悟　利用半角公式求值的思路

(1)看角:若已知三角函数式中的角是待求三角函数式中角的两倍,则求解时常常借助半角公式求解.

(2)明范围:由于半角公式求值常涉及符号问题,因此求解时务必依据角的范围,求出相应半角的范围.

(3)选公式:涉及半角公式的正切值时,常用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$,其优点是计算时可避免因开方带来的求角的范围问题;涉及半角公式的正、余弦值时,常先利用 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$计算.

跟踪训练1

已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$________.

二、和差化积、积化和差

问题2　请写出两角和、差的正弦、余弦公式.

【知识梳理】

1. 积化和差

$\sin\alpha\cos\beta=$________;

$\cos\alpha\sin\beta=$________;

$\cos\alpha\cos\beta=$________;

$\sin\alpha\sin\beta=$________.

2. 和差化积

$\sin\theta+\sin\varphi=$________;

$\sin\theta-\sin\varphi=$________;

$\cos\theta+\cos\varphi=$________;

$\cos\theta-\cos\varphi=$________.

例 2 求 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$的值.

跟踪训练 2

求下列各式的值:

(1) $\cos 29°\cos 31°-\frac{1}{2}\cos 2°$;

(2) $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}-2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}$.

三、三角函数式的化简、证明

例 3 求证:$\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}-\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

跟踪训练 3

化简:$2\sqrt{\sin 8+1}+\sqrt{2\cos 8+2}$.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)半角公式.

(2)积化和差、和差化积.

(3)三角函数式的化简、证明.

2. 方法归纳:转化与化归.

3. 常见误区:半角公式符号的判断.

随堂演练

1. 已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$,$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,则 $\sin\frac{\alpha}{2}$等于(　　)

A. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $-\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

2. 已知 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$,$-180°<\theta<-90°$,则 $\cos\frac{\theta}{2}$等于(　　)

A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $-\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

3. 化简$\sqrt{2+\cos 2-\sin^2 1}$的结果是(　　)

A. $-\cos 1$　　B. $\cos 1$

C. $\sqrt{3}\cos 1$　　D. $-\sqrt{3}\cos 1$

4. 化简:$\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$________.

提醒:完成作业　第五章　5.5　5.5.2　第 1 课时

第 2 课时　简单的三角恒等变换(二)

【学习目标】1. 能够利用三角恒等变换对三角函数进行化简、合并.　2. 能够利用三角恒等变换解决几何中的问题以及生活中的实际问题.

一、三角恒等变换与三角函数

问题 1　请同学们根据两角和、差的正弦公式对下面几个式子进行合并:$\sin x\pm\cos x$, $\sin x\pm\sqrt{3}\cos x$,$\cos x\pm\sqrt{3}\sin x$.

问题 2　一般地,对于 $y=a\sin x+b\cos x$,你能对它进行合并吗?

【知识梳理】

辅助角公式

$y=a\sin x+b\cos x=$________. $\left(\text{其中}\tan\theta=\dfrac{b}{a}\right)$

例 1 已知函数 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值,并求使 $h(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

反思感悟 研究三角函数的性质,如单调性和最值问题,通常是把复杂的三角函数通过恰当的三角变换,转化为一种简单的三角函数,再研究转化后的函数的性质.在这个过程中通常利用辅助角公式,将 $y=a\sin x+b\cos x$ 转化为 $y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$ 或 $y=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$ 的形式,以便研究函数的性质.

跟踪训练 1

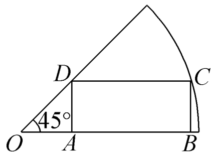
已知函数 $f(x)=\sin^2x-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

二、三角恒等变换在几何中的应用

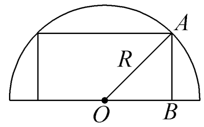
例 2 某工人要从一块圆心角为 45° 的扇形木板中割出一块一边在半径上的内接长方形桌面，若扇形的半径长为 1 m，求割出的长方形桌面的最大面积(如图).



反思感悟 三角函数与平面几何有着密切联系，几何中的角度、长度、面积等问题，常借助三角变换来解决，体现了数学中的化归思想.

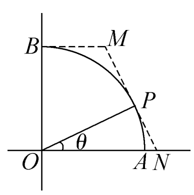
跟踪训练 2

如图所示，要把半径为 R 的半圆形木料截成长方形，应怎样截取，才能使 $\triangle OAB$ 的周长最长?



三、三角恒等变换在实际问题中的应用

例 3 如图，OA，OB 是两条互相垂直的笔直公路，半径 $OA=2$ km 的扇形 AOB 是某地的一名胜古迹区域. 当地政府为了缓解该古迹周围的交通压力，欲在圆弧 AB 上新增一个入口 P(点 P 不与 A，B 重合)，并新建两条都与圆弧 AB 相切的笔直公路 MB，MN，切点分别是 B，P. 当新建的两条公路总长最小时，投资费用最低. 设 $\angle POA=\theta$，公路 MB，MN 的总长为 $f(\theta)$.

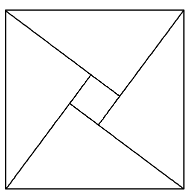


(1)求 $f(\theta)$ 关于 θ 的函数解析式,并写出函数的定义域;

(2)当 θ 为何值时,投资费用最低?并求出 $f(\theta)$ 的最小值.(注:已知 $a,b\in\mathbf{R}^*$,$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,当且仅当 $a=b$ 时取"=")

跟踪训练 3

在北京召开的国际数学家大会的会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的.弦图由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形(如图所示).如果小正方形的面积为 1,大正方形的面积为 25,直角三角形中较小的锐角为 θ,则 $\cos 2\theta=$________.



【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)辅助角公式.

(2)三角恒等变换的综合问题.

(3)三角函数在实际问题中的应用.

2. 方法归纳:转化与化归.

3. 常见误区:易忽视实际问题中的定义域.

随堂演练

1. 已知 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 等于 ( )

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

2. 若函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$,则 ( )

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2

C. 函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\dfrac{9\pi}{8}\right)$ 上单调递增

3. 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时,关于 x 的方程 $\sqrt{3}\sin x-\cos x-m=0$ 有解,则实数 m 的取值范围为( )

A. $(-2,\sqrt{3})$　　B. $[-2,\sqrt{3}]$

C. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　D. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

4. 函数 $f(x)=3\sin x+5\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最大值是________.

提醒:完成作业　第五章　5.5　5.5.2　第 2 课时

5.6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

第 1 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象(一)

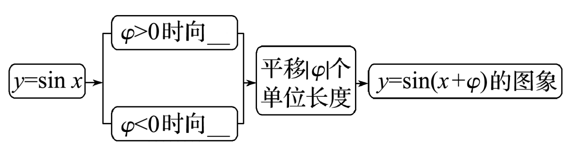
【学习目标】1. 理解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中 φ,ω,A 对图象的影响.　2. 会利用图象的变换解决简单的问题.

一、φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$,$x\in\mathbf{R}$ 图象的影响

问题 1　你能在同一平面直角坐标系下画出函数 $y=\sin x$ 和 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象吗?这两个函数的图象有什么关系?

【知识梳理】

φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$,$x\in\mathbf{R}$ 图象的影响



例 1　函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象可以看作是由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到的?

跟踪训练 1

(1)要得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象,只要将函数 $y=\sin 2x$ 的图象　　(　　)

A. 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

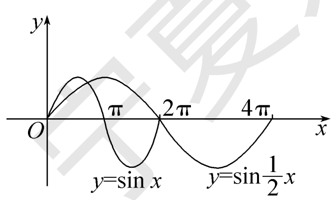
C. 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

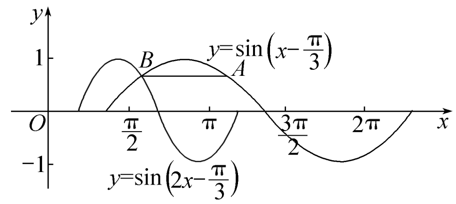
(2)为了得到 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象,只需将函数 $y=\cos x$ 的图象________.

二、$\omega(\omega>0)$ 对 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

问题 2　观察下图,你能发现什么?

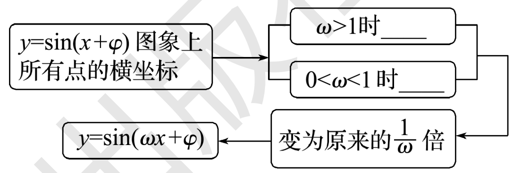


问题 3　借助多媒体,在同一平面直角坐标系下画出 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的函数图象,如图所示,结合问题 2,你能得到什么?



【知识梳理】

$\omega(\omega>0)$ 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响



例 2　为了得到 $y=\sin 4x, x\in\mathbf{R}$ 的图象,只需把正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有点的　　(　　)

A. 横坐标伸长到原来的 4 倍,纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{4}$,纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的 4 倍,横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{4}$,横坐标不变

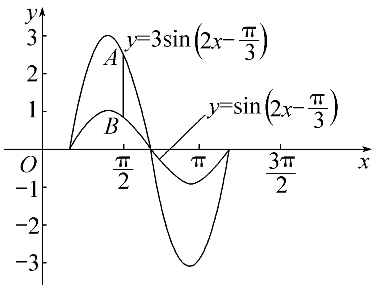
反思感悟　在研究 $\omega(\omega>0)$ 对 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响时,把 $y=\sin(x+\varphi)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变),即可得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

跟踪训练 2

函数 $y=\cos x$ 图象上各点的纵坐标不变,把横坐标变为原来的 2 倍,得到图象的解析式为 $y=\cos \omega x$,则 ω 的值为________.

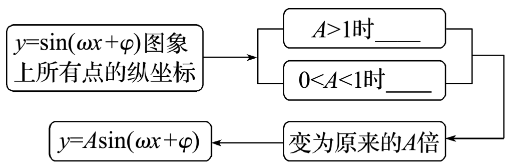
三、$A(A>0)$ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

问题 4　借助多媒体,在同一平面直角坐标系下画出 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象,如图所示,你能发现什么?



【知识梳理】

$A(A>0)$对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响



例 3 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$图象上所有点的横坐标保持不变，将纵坐标________(填“伸长”或“缩短”)为原来的________倍，将会得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象.

反思感悟 在研究 $A(A>0)$对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响时，把 $y=\sin(\omega x+\varphi)$纵坐标(横坐标不变)变成原来的 A 倍，即可得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

跟踪训练 3

为了得到函数 $y=\frac{1}{4}\cos x$ 的图象，只需把余弦曲线 $y=\cos x$ 上所有点的 ( )

A. 横坐标伸长到原来的 4 倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的 4 倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，横坐标不变

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)平移变换.

(2)伸缩变换.

2. 方法归纳：数形结合法.

3. 常见误区：探究平移变换时，需要保证 x 的系数为 1.

随堂演练

1. 函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象经过怎样的平移可得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象 ( )

A. 向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

B. 向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度

D. 向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度

2. 为了得到函数 $y=4\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象，只需将函数 $y=4\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象上所有点的 ( )

A. 横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，横坐标不变

3. 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{10}\right)$的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得图象的各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，所得图象的函数解析式是 ( )

A. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)$　　B. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{20}\right)$

C. $y=\sin x$　　D. $y=\sin 4x$

4. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象可由 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象________得到.

提醒：完成作业　第五章　5.6　第 1 课时

第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象(二)

【学习目标】 1. 掌握 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象间的变换关系，并能正确地指出其变换步骤.
2. 会用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

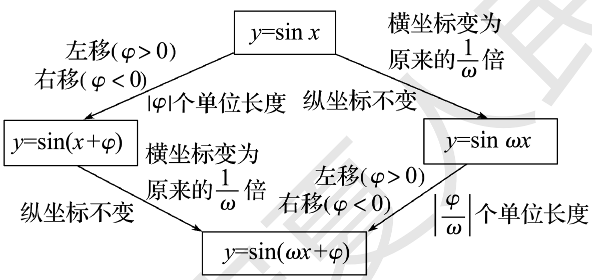
一、$y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象间的变换关系

问题 1　根据上节课所学，你能由函数 $y=\sin x$ 经过平移、伸缩变换成函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 吗？

问题 2　在函数的变换过程中，一定是先平移再伸缩吗？如果能先伸缩，那么平移的单位长度一样吗？

【知识梳理】

由函数 $y=\sin x$ 的图象得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的图象的两种途径可以通过图形表示，如图.



例 1　由 $y=3\sin x$ 的图象变换得到 $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象主要有两个过程：先平移后伸缩和先伸缩后平移，前者需向左平移________个单位长度，后者需向左平移________个单位长度.

反思感悟　先平移后伸缩和先伸缩后平移中，平移的量是不同的，在应用中一定要区分清楚，以免混乱而导致错误. 弄清平移对象是减少错误的关键.

跟踪训练 1

将函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=A\sin x$ 的图象，试求 ω 和 φ 的值.

二、“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

问题 3　用“五点法”作函数 $y=\sin x$ 的图象时，找哪五个关键点？

例 2　用“五点法”画函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期内的简图.

反思感悟　“五点法”作图的实质

(1)利用“五点法”作函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，实质是利用函数的三个零点，两个最值点画出函数在一个周期内的图象.

(2)用“五点法”作函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的步骤.

第一步：列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
$f(x)$	0	A	0	$-A$	0

第二步：在同一平面直角坐标系中描出各点.

第三步：用光滑曲线连接这些点，形成图象.

(3)在画指定区间上的函数图象时，先由 x 的第一个取值确定 $\omega x+\varphi$ 整体取的第一个值，再确定 $\omega x+\varphi$ 整体后面的取值.

跟踪训练 2

已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)用“五点法”作出它在一个周期内的简图.

(2)该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

【课堂小结】

1. 知识清单：

(1)平移变换.

(2)伸缩变换.

(3)图象的画法.

2. 方法归纳：五点法、数形结合法.

3. 常见误区：忽视先平移和先伸缩作图时平移的量不一样.

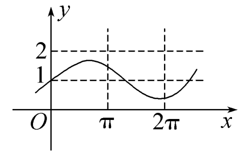
随堂演练

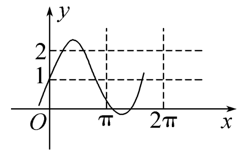
1. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，所得图象的函数解析式是 ( )

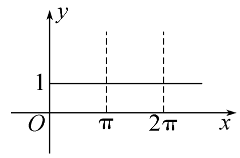
A. $y=\cos 2x$　　B. $y=1+\cos 2x$

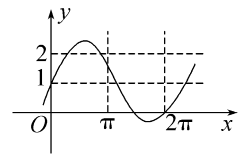
C. $y=1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x-1$

2. 已知 a 是实数，则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图象不可能是 ( )

A.


B.


C.


D.


3. 把函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变)，然后把所得图象上所有点的纵坐标扩大到原来的 2 倍(横坐标不变)，得到的图象所表示的函数解析式是 ( )

A. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$

B. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$

C. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$

D. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$

4. 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=$________.

提醒：完成作业　第五章　5.6　第 2 课时

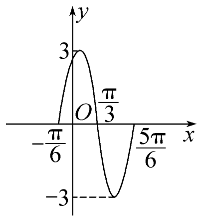
第 3 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质(一)

【学习目标】1. 会通过函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式.　2. 结合正弦函数的性质，掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质.

一、已知图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式

问题 1　确定三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式，就要确定三角函数的哪些参数？

问题 2　观察如图所示图象，你能说说它有什么特点吗？



例 1　已知问题 2 中函数图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的一部分，求此函数的解析式.

跟踪训练 1

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ $\left(\text{其中 } A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象与 x 轴的交点中，相邻两个交点的距离为 $\frac{\pi}{2}$，且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$，求 $f(x)$ 的解析式.

二、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的有关性质

问题 3　你能用正弦函数 $y=\sin x$ 的性质类比三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质吗？

【知识梳理】

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$A>0$，$\omega>0$ 的有关性质

名称	性质
定义域	$\mathbf{R}$
值域	$[-A,A]$
周期性	$T=\frac{2\pi}{\omega}$
对称性	对称中心 $\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)$
对称轴	$x=\frac{\pi}{2\omega}+\frac{k\pi-\varphi}{\omega}$
奇偶性	当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时是奇函数； 当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时是偶函数
单调性	通过整体代换可求出其单调区间

例 2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

(2) 求 $f(x)$ 的图象的对称轴方程和对称中心；

(3) 求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的取值集合.

反思感悟　(1) 正弦、余弦型函数奇偶性的判断方法

正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和余弦型函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 不一定具备奇偶性，对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时为奇函数，当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时为偶函数；对于函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时为偶函数，当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时为奇函数.

(2) 与正弦、余弦型函数有关的单调区间的求解技巧

①结合正弦、余弦函数的图象，熟记它们的单调区间.

②确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 单调区间的方法:采用“换元”法整体代换,将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体,可令“$z=\omega x+\varphi$”,即通过求 $y=A\sin z$的单调区间来求出函数的单调区间. 若 $\omega<0$,则可利用诱导公式先将 x 的系数转变为正数,再求单调区间.

跟踪训练 2

已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi<\pi)$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,其图象关于点$M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$对称,且在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上具有单调性,求 φ 和 ω 的值.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)由图象求三角函数的解析式.

(2)三角函数的性质的综合问题.

(3)三角函数的实际应用.

2. 方法归纳:特殊点法、数形结合法.
3. 常见误区:求值时递增区间上的零点和递减区间上的零点的区别.

随堂演练

1. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期是 ( )

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π

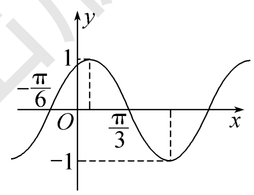
C. 2π　　D. 4π

2. 若函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$ 对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$等于 ( )

A. 3 或 0　　B. -3 或 0

C. 0　　D. -3 或 3

3. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,则 φ 的值为 ( )



A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $-\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 在函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的一个周期上,当 $x=\frac{\pi}{6}$时,有最大值 2,当 $x=\frac{2\pi}{3}$时,有最小值 -2,则 $\omega=$________.

提醒:完成作业　第五章　5.6　第 3 课时

第 4 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质(二)

【学习目标】1. 结合三角恒等变换中的有关公式,研究三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的综合性问题.
2. 构建三角函数模型,解决实际问题.

一、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的综合问题

问题 1　如何利用辅助角公式对函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 进行合并?

例 1　已知函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-4\sin^2\omega x+2(\omega>0)$,其图象与 x 轴的两个相邻交点的距离为$\frac{\pi}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)若将 $f(x)$的图象向左平移 $m(m>0)$个单位

长度得到的函数 $g(x)$ 的图象恰好经过点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，求当 m 取得最小值时，$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上的单调区间.

跟踪训练 1

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}$ $(\omega>0)$ 的两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

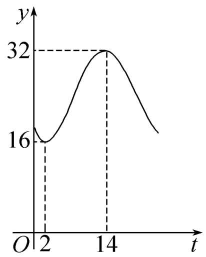
(1) 求 ω 的值；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将所得函数的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若函数 $y=g(x)-k$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上存在零点，求实数 k 的取值范围.

二、利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 解决实际问题

问题 2　结合三角函数周期性的变换规律，你认为生活中哪些现象可以构造三角函数模型？

例 2 建设生态文明,是关系人民福祉,关乎民族未来的长远大计,某市通宵营业的大型商场,为响应节能减排的号召,在气温超过 28 ℃时,才开放中央空调降温,否则关闭中央空调. 如图是该市夏季一天的气温(单位:℃)随时间($0\leqslant t\leqslant 24$,单位:h)的大致变化曲线,该曲线近似地满足函数关系 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$.



(1)求函数 $y=f(t)$ 的解析式;

(2)请根据(1)的结论,判断该商场的中央空调应在本天内何时开启?何时关闭?

跟踪训练 2

潮汐是发生在沿海地区的一种自然现象,其形成是海水受日月的引力. 潮是指海水在一定的时候发生涨落的现象. 一般来说,早潮叫潮,晚潮叫汐. 某观测站通过长时间的观测,发现潮汐的涨落规律和函数图象 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$基本一致且周期为 4π,其中 x 为时间,$f(x)$为水深. 当 $x=\dfrac{\pi}{4}$时,海水上涨至最高 5 米.

(1)求函数的解析式,并作出函数 $f(x)$ 在 $[0,4\pi]$ 内的简图;

(2)求海水水深持续加大的时间区间.

【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)三角函数的综合应用.

(2)构造三角函数模型解决实际问题.

2. 方法归纳:辅助角公式、待定系数法.

3. 常见误区:易忽视实际问题中自变量的取值范围.

随堂演练

1. 函数 $y=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心是 ( )

A. $(0,0)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$　　D. $(3,0)$

2. 已知奇函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 满足 $f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，则 ω 的取值可能是 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

3. 若将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后所得图象对应函数的单调递增区间是 ( )

A. $\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

4. 将函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(a,b\in\mathbf{R},a\neq0)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到一个偶函数图象，则 $\dfrac{b}{a}=$ ________.

提醒：完成作业　第五章　5.6　第 4 课时

5.7　三角函数的应用

第 1 课时　三角函数的应用（一）

【学习目标】 1. 了解生活中具有周而复始、循环往复特点的现象. 2. 通过构建三角函数模型，尝试解决物理中的简单问题.

一、简谐运动

问题 1　现实生活中存在大量周而复始、循环往复特点的周期运动的变化现象，你能举出哪些例子？

问题 2　某个弹簧振子（简称振子）在完成一次全振动的过程中，时间 t（单位：s）与位移 y（单位：mm）之间的对应数据如表所示，试根据这些数据确定这个振子的位移关于时间的函数解析式.

t	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
y	−20.0	−17.8	−10.1	0.1	10.3	17.7	20.0

t	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
y	17.7	10.3	0.1	−10.1	−17.8	−20.0

【知识梳理】

1. 在物理学中，把物体受到的力(总是指向平衡位置)正比于它离开平衡位置的距离的运动称为"简谐运动". 简谐运动可以用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in[0,+\infty)$表示，其中 $A>0$, $\omega>0$.

2. A 就是这个简谐运动的振幅，它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离；

这个简谐运动的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，它是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间；

这个简谐运动的频率由公式 $f=\frac{1}{T}=\frac{|\omega|}{2\pi}$ 给出，它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数；

$\omega x+\varphi$ 称为相位；$x=0$ 时的相位 φ 称为初相.

例 1 振动量函数 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的初相和频率分别为 $-\pi$ 和 $\frac{3}{2}$，则它的运动周期为________，相位是________.

反思感悟 若 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是一个简谐运动的解析式，则 $A>0$, $\omega>0$，若 A, ω 不满足条件，则利用诱导公式变形，使之满足，再根据概念求值.

跟踪训练 1

弹簧振子的振幅为 2 cm，在 6 s 内振子通过的路程是 32 cm，由此可知该振子振动的 ( )

A. 频率为 1.5 Hz

B. 周期为 1.5 s

C. 周期为 6 s

D. 频率为 6 Hz

二、三角函数"拟合"模型的应用

例 2 下表所示的是某地 2000～2020 年的月平均气温(华氏度).

月份	1	2	3	4	5	6
平均气温	21.4	26.0	36.0	48.8	59.1	68.6

月份	7	8	9	10	11	12
平均气温	73.0	71.9	64.7	53.5	39.8	27.7

以月份为 x 轴，$x=$月份-1，平均气温为 y 轴建立平面直角坐标系.

(1)描出散点图，并用正弦曲线去拟合这些数据.

(2)这个函数的周期是多少？

(3)估计这个正弦曲线的振幅 A.

(4)下面四个函数模型中哪一个最适合这些数据？

①$\frac{y}{A}=\cos\frac{\pi x}{6}$；②$\frac{y-46}{A}=\cos\frac{\pi x}{6}$；③$\frac{y-46}{-A}=\cos\frac{\pi x}{6}$；④$\frac{y-26}{A}=\sin\frac{\pi x}{6}$.

跟踪训练 2

下表中给出了在 24 小时内人的体温的变化(从夜间零点开始计时):

时间/时	0	2	4	6	8	10	12
温度/℃	36.8	36.7	36.6	36.7	36.8	37	37.2

时间/时	14	16	18	20	22	24
温度/℃	37.3	37.4	37.3	37.2	37	36.8

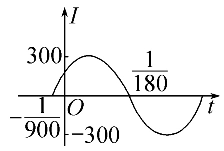
(1)作出这些数据的散点图;

(2)选用一个三角函数来近似描述这些数据.

三、三角函数在物理中的应用

例 3 已知电流 I 与时间 t 的关系为 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$.

(1)如图所示的是 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$ $\left(\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象,根据图中数据求 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$的解析式.



(2)如果 t 在任意一段$\frac{1}{150}$ s 的时间内,电流 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$都能取得最大值和最小值,那么 ω 的最小正整数值是多少?

跟踪训练 3

已知弹簧上挂着的小球做上下振动时，小球离开平衡位置的位移 s(cm) 随时间 t(s) 的变化规律为 $s=4\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,+\infty)$. 用"五点法"作出这个函数的简图，并回答下列问题：

(1) 小球在开始振动($t=0$)时的位移是多少？

(2) 小球上升到最高点和下降到最低点时的位移分别是多少？

(3) 经过多长时间小球往复振动一次？

【课堂小结】

1. 知识清单：

   (1) 简谐运动.

   (2) 函数的"拟合".

   (3) 三角函数在物理中的应用.

2. 方法归纳：数学建模、数形结合.

3. 常见误区：选择三角函数模型时，最后结果忘记回归实际问题.

随堂演练

1. 函数 $y=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期、振幅、初相分别是 ( )

   A. $3\pi,\frac{1}{3},\frac{\pi}{6}$

   B. $6\pi,\frac{1}{3},\frac{\pi}{6}$

   C. $3\pi,3,-\frac{\pi}{6}$

   D. $6\pi,3,\frac{\pi}{6}$

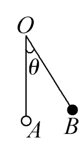
2. 在两个弹簧上各挂一个质量分别为 M_1 和 M_2 的小球，它们做上下自由振动. 已知它们在时间 t(s) 时离开平衡位置的位移 s_1(cm) 和 s_2(cm) 分别由下列两式确定：

   $s_1=5\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$，$s_2=5\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$. 则在时间 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时，s_1 与 s_2 的大小关系是 ( )

   A. $s_1>s_2$　　B. $s_1<s_2$

   C. $s_1=s_2$　　D. 不能确定

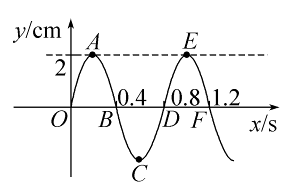
3. 如图所示的是一个单摆，以平衡位置 OA 为始边、OB 为终边的角 $\theta(-\pi<\theta<\pi)$ 与时间 t(s) 满足函数关系式 $\theta=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$，则当 $t=0$ 时，角 θ 的大小及单摆的频率分别是 ( )

   A. $\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}$　　B. $2,\frac{1}{\pi}$,

   C. $\frac{1}{2},\pi$　　D. $2,\pi$

4. 如图为某简谐运动的图象，则这个简谐运动需要________s 往返一次.

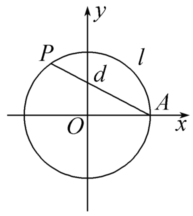
提醒：完成作业　第五章　5.7　第 1 课时

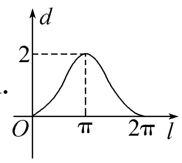
第 2 课时　三角函数的应用(二)

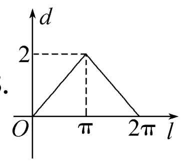
【学习目标】 1. 通过构建三角函数模型解决生活中一些简单的问题.　2. 体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

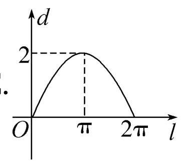
一、三角函数图象类问题

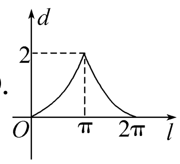
例 1　如图所示,设点 A 是单位圆上的一定点,动点 P 从点 A 出发在圆上按逆时针方向旋转一周,点 P 所旋转过的弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长为 l,弦 AP 的长为 d,则函数 $d=f(l)$ 的图象大致是 (　　)



A. 

B. 

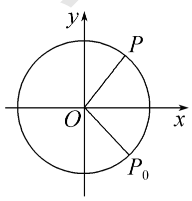
C. 

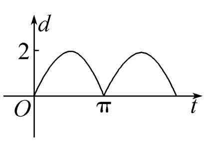
D. 

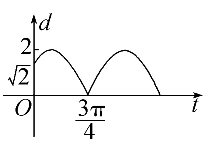
反思感悟　解决函数图象与实际问题对应问题的策略:一般方法是根据已知所反映出来的性质解决,充分利用图象中的几何关系,此外特殊点也可以作为判断的好方法.

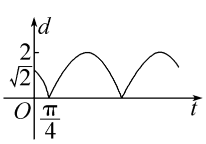
跟踪训练 1

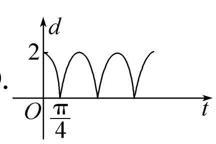
如图,质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动,其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$,角速度为 1 rad/s,那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 (　　)



A. 

B. 

C. 

D. 

二、三角函数在生活中的应用

例 2　某实验室一天的温度(单位:℃)随时间 t(单位:h)的变化近似满足函数关系:$f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$,$t\in[0,24]$.

(1)求实验室这一天的最大温差;

(2)若要求实验室温度不高于 11 ℃,则在哪段时间实验室需要降温?

跟踪训练 2

健康成年人的收缩压和舒张压一般为 120～140 mmHg 和 60～90 mmHg.心脏跳动时,血压在增加或减小.血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压,血压计上的读数就是收缩压和舒张压,读数 120/80 mmHg 为标准值.记某人的血压满足函数式 $p(t)=25\sin 160\pi t+115$,其中 $p(t)$ 为血压(mmHg),t 为时间(min),试回答下列问题:

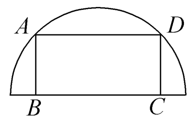
(1)求函数 $p(t)$ 的周期;

(2)求此人每分钟心跳的次数;

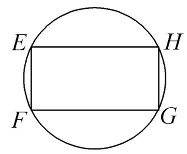
(3)求出此人的血压在血压计上的读数,并与正常值比较.

三、三角函数在几何中的应用

例 3 甲同学从一个半径为 r 的半圆形铁板中截取一块矩形 $ABCD$(如图①),记其最大面积为 S_1,乙同学从一个半径为 R 的圆形铁板中截取一块矩形 $EF-GH$(如图②),记其最大面积为 S_2,试问 r 和 R 满足什么关系时,$S_1=S_2$? 说明理由.



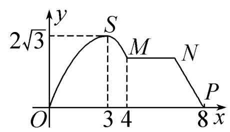
①



②

跟踪训练 3

如图,某市拟在长为 8 km 的道路 OP 的一侧修建一条运动赛道,赛道的前一部分为曲线段 OSM,该曲线段为函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$,$x\in[0,4]$的图象,且图象的最高点为$S(3,2\sqrt{3})$,赛道的后一部分为折线段 MNP,为保证参赛运动员的安全,限定$\angle MNP=120°$.求 A,ω 的值及 M,P 两点间的距离.



【课堂小结】

1. 知识清单:

(1)三角函数在生活中的应用.

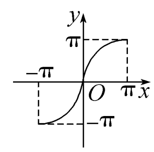
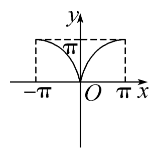
(2)三角函数在几何中的应用.

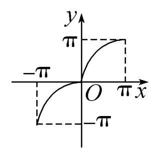
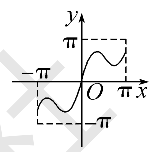
2. 方法归纳:数学建模、数形结合.

3. 常见误区:选择三角函数模型时,最后结果忘记回归实际生活.

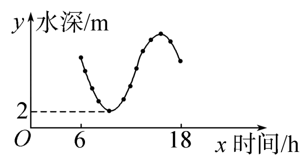
随堂演练

1. 函数 $y=x+\sin|x|,x\in[-\pi,\pi]$的大致图象是 ( )

A. 
B. 

C. 
D. 

2. 如图,某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$. 据此函数可知,这段时间水深(单位:m)的最大值为 ( )



A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

3. 某艺术展览馆在开馆时间段(9:00~16:00)的参观人数(单位:千)随时间 t(单位:时)的变化近似满足函数 $f(t)=A\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{11\pi}{6}\right)+5(A>0,9\leqslant t\leqslant16)$,且下午两点整参观人数为 7 千,则开馆中参观人数的最大值为 ( )

A. 1 万　　B. 9 千

C. 8 千　　D. 7 千

4. 某星星的亮度变化周期为 10 天,此星星的平均亮度为 3.8 星等,最高亮度距离平均亮度 0.2 星等,则可近似地描述此星星的亮度与时间之间关系的一个三角函数解析式为________.

提醒:完成作业　第五章　5.7　第 2 课时

章末复习课

知识网络

- 三角函数
  - 任意角、弧度制
    - 任意角
      - 定义
      - 终边相同的角
    - 弧度制
      - 角度与弧度互化
      - 扇形的弧长和面积公式
  - 任意角的三角函数
    - 任意角的三角函数的定义
    - 同角三角函数关系式
    - 诱导公式
  - 三角函数的图象和性质
    - 正弦函数的图象和性质
    - 余弦函数的图象和性质
    - 正切函数的图象和性质
  - 三角恒等变换
    - 和差公式
      - 两角和与差的正弦
      - 两角和与差的余弦
      - 两角和与差的正切
    - 倍角公式
      - 倍角的正弦
      - 倍角的余弦
      - 倍角的正切
    - 应用
  - 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质
  - 三角函数模型的简单应用

一、同角三角函数的基本关系和诱导公式

1. (1)两个基本关系式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

   (2)诱导公式：可概括为 $k\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的各三角函数值的化简公式. 记忆规律是：奇变偶不变，符号看象限.
2. 化简三角函数式的常用方法有：(1)直接应用公式；(2)切化弦；(3)异角化同角；(4)特殊值与特殊角的三角函数互化；(5)通分、约分；(6)配方去根号.
3. 求值一般包括：(1)给角求值；(2)给值求值；(3)给值求角.
4. 掌握三角函数中公式的正用、逆用及变形用，重点提升逻辑推理和数学运算素养.

例 1 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 ( )

A. $\dfrac{6}{5}$ B. 1

C. $\dfrac{1}{5}$ D. $\dfrac{1}{5}$

跟踪训练 1

已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$，且 $\dfrac{5\pi}{4}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值为 ( )

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{3}{4}$

二、三角函数的图象与性质

1. 三角函数的性质包括定义域、值域、单调性、奇偶性、对称性等，在研究性质时，将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，利用整体代换思想解题是常见的技巧.
2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

   (1)"五点法"作图；(2)图象伸缩、平移变换.
3. 掌握三角函数的图象和性质，重点培养直观想象和数学运算素养.

例 2 函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象的对称轴为直线________，对称中心为________.

跟踪训练 2

已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+a+1$（其中 a 为常数）.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 4，求 a 的值.

三、三角函数的图象变换问题

1. 由函数 $y=\sin x$ 的图象得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的图象有两种途径：先平移再伸缩；先伸缩再平移，这两种途径的区别是平移的单位长度不同，其余参数不受影响，若相应变换的函数名称不同时，要先用诱导公式转化为同名的三角函数，再进行平移或伸缩.
2. 掌握三角函数图象变换的规则，重点提升逻辑推理和数学运算素养.

例 3 已知函数 $f(x)=4\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)\cos \omega x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得最值，其中 $\omega\in(0,2)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{36}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 3 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 α 为锐角，且 $g(\alpha)=\frac{4}{3}-\sqrt{2}$，求 $\cos\alpha$ 的值.

跟踪训练 3

把函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象上每一点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，然后再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到一个最小正周期为 2π 的奇函数 $g(x)$，求 ω 和 φ 的值.

四、三角恒等变换与三角函数的综合问题

1. 三角恒等变换与三角函数的综合问题，常以三角恒等变换为主要的化简手段，考查三角函数的性质．当给出的三角函数关系式较为复杂时，我们要先通过三角恒等变换，将三角函数的表达式变形化简为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$ 等形式，然后根据化简后的三角函数，讨论其图象和性质．
2. 通过三角恒等变换，进而研究三角函数的性质，培养逻辑推理和数学运算素养．

例 4 已知函数 $f(x)=\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}, x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

跟踪训练 4

已知函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值；

(2)将 $f(x)$ 的图象上所有点向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象，若 $y=g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，求当 m 取最小值时，函数 $y=g(x)$ 的单调递增区间.

随堂演练

1. 若圆弧长度等于圆内接正三角形的边长，则其圆心角的弧度数为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. 3　　D. $\sqrt{3}$

2. 设 $5\pi<\theta<6\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}=a$，则 $\sin\frac{\theta}{4}$ 等于　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{1+a}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{1-a}}{2}$　　C. $-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$　　D. $-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

3. 如果 $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，那么 x 的取值范围是________.